

∞ Baccalauréat S Liban 31 mai 2011 ∞

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les trois points :

$$A(1 ; 2 ; -1), B(-3 ; -2 ; 3) \text{ et } C(0 ; -2 ; -3)$$

1.
 - a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; -1 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$.
Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.
3. On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 2).
 - a. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2 ; 0 ; -5)$.
 - b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).
 - d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).
4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

EXERCICE 2

3 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2 . Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.
D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.
On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.
 - a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{3}{5}$

Réponse B : $\frac{4}{5}$

Réponse C : $\frac{3}{50}$

Réponse D : $\frac{6}{25}$

- b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

$$\text{Réponse A : } \frac{21}{50} \quad \text{Réponse B : } \frac{33}{50} \quad \text{Réponse C : } \frac{3}{5} \quad \text{Réponse D : } \frac{12}{25}$$

- c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

$$\text{Réponse A : } \frac{4}{11} \quad \text{Réponse B : } \frac{6}{25} \quad \text{Réponse C : } \frac{7}{11} \quad \text{Réponse D : } \frac{33}{50}$$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.

Les boules sont indiscernables au toucher.

L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

- a. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

$$\text{Réponse A : } \frac{11}{81} \quad \text{Réponse B : } \frac{2}{7} \quad \text{Réponse C : } \frac{5}{84} \quad \text{Réponse D : } \frac{4}{63}$$

- b. La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

$$\text{Réponse A : } \frac{2}{7} \quad \text{Réponse B : } \frac{1}{7} \quad \text{Réponse C : } \frac{1}{21} \quad \text{Réponse D : } \frac{79}{84}$$

- c. On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.

Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

$$\text{Réponse A : } 76 \quad \text{Réponse B : } 71 \quad \text{Réponse C : } 95 \quad \text{Réponse D : } 94$$

EXERCICE 3

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' , $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à 2π près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' , on a : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à 2π près.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - i \quad \text{et} \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + i.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_A .
2. a. Écrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

- b. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- c. En déduire la forme exponentielle de z_B .
3. On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
- a. Déterminer l'afixe du point B_1 .
- b. En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.
- Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.
- On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.
- a. Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).
- b. Soit M un point distinct du point O.
Son affixe z est égale à $\rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.
Montrer que l'afixe z' du point M' est égale à $\rho e^{i(\frac{\pi}{6}-\theta)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).
- c. Déterminer l'ensemble (E).

EXERCICE 3**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A : Restitution organisée de connaissances**

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π .

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B.

- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .
- On appelle Ω le centre de la similitude s .
 - En utilisant la relation $\vec{DC} = \vec{OC} - \vec{OD}$, démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.
 - En déduire la nature du triangle ΩDC .
- On pose $\sigma = s \circ s$.
 - Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
 - Déterminer l'image du point D par la transformation σ .
- Démontrer que le quadrilatère AD Ω B est un rectangle.
- Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et $2i$.

- a. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est :
 $z' = (1 + i)z + 2 - i$ où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par s .
- b. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .
 Démontrer que $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$
- c. Soit J le point d'affixe $1 + 3i$.
 Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que
 $\overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$, M' désignant l'image du point M par s ?

EXERCICE 4**7 points****Commun à tous les candidats**

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x + e^{-x}.$$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

- Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Montrer que (\mathcal{C}) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}.$$

- Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1 + x) \leq x$.
 On pourra étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1 + x)$.
- En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n + 1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \frac{1}{n}$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leq u_n$.
- En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$.

- a. Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx.$$
 b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_n \leq 1 + \ln(n - 1).$$
- Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que
 $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n - 1)$.
 Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)} \right)_{n \geq 2}$ converge vers 1.