collection École
Documents d'accompagnement des programmes

Mathématiques

École primaire

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche
Direction de l'enseignement scolaire

Applicable à la rentrée 2003

Centre national de documentation pédagogique

Ces textes ont été rédigés, à la demande de la direction de l'enseignement scolaire, par la commission mathématique rattachée au groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire, pilotée par Roland Charnay (professeur de mathématiques, IUFM de Lyon) et composée des membres suivants :

Luce DOSSAT	inspectrice de l'Éducation nationale, Clermont-Ferrand
Jean FROMENTIN	professeur de mathématiques en collège, Niort
Catherine HOUDEMENT	maîtresse de conférence, IUFM de Haute-Normandie
Nicole MATULIK	professeure des écoles, maître-formateur
Guy PIGOT	conseiller pédagogique en circonscription, Chamalières
Paul PLANCHETTE	professeur de mathématiques en collège, Saint-Galmier

Le texte sur le calcul mental a bénéficié de la contribution de François BOULE (professeur de mathématiques, formateur au CNEFEI). Celui portant sur l'étude de l'espace et de la géométrie au cycle 2 a bénéficié de la contribution de Marie-Hélène SALIN (maître de conférences de mathématiques à l'université de Bordeaux).

Coordination : Véronique FOUQUAT, bureau du contenu des enseignements,
direction de l'enseignement scolaire.

Suivi éditorial : Christianne Berthet
Secrétariat d'édition : Nicolas Gouny
Mise en pages : Michelle Bourgeois

© CNDP, février 2005
ISBN : 2-240-01750-X
ISSN : 1629-5692

Sommaire

Introduction

Les nouveaux programmes sont maintenant en application pour toute la scolarité primaire. Les documents d'application apportent un éclairage essentiel sur les conditions de leur mise en œuvre.
Les interrogations manifestées lors de la consultation des enseignants et les questions adressées aux formateurs ont conduit à l'élaboration de documents complémentaires apportant un éclairage spécifique sur quelques thèmes sensibles. Destinés aux enseignants, ces documents, rassemblés dans le présent ouvrage, serviront également de supports aux actions de formation, initiale ou continuée. Chacun d'eux concerne, en général, plusieurs cycles de l'école primaire (souvent les trois cycles) et gagneront donc à être travaillés en équipes d'école.
Certains thèmes importants (numération décimale, fractions et nombres décimaux, proportionnalité, espace et géométrie au cycle 3) ne sont pas abordés en tant que tels dans cet ouvrage, dont les limites ont conduit à faire des choix.

Les problèmes pour chercher

Comme les précédents, les programmes de 2002 mettent « la résolution de problèmes au centre des activités mathématiques de l'élève ». Le programme établit une liste de compétences générales concernant la résolution de problèmes à acquérir en fin de cycle : voir le *BO* hors-série n° 1 du 14 février 2002, page 53 (cycle 2) et page 84 (cycle 3). Les documents d'application précisent la place que doit avoir la résolution de problèmes dans les apprentissages (pages 13 et 14 pour le cycle 2, page 13 pour le cycle 3)[1].

Pour mieux situer notre propos, voici trois extraits des introductions des documents d'application concernant les activités de recherche :

« Dès l'école élémentaire, les élèves peuvent être confrontés à de véritables problèmes de recherche, pour lesquels ils ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. C'est alors l'activité même de résolution de problème qui est privilégiée dans le but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter. Ces situations peuvent enrichir leur représentation des mathématiques, développer leur désir de chercher, leurs capacités de résolution et la confiance qu'ils peuvent avoir dans leurs propres moyens. [...]

« Dans ces activités, *l'enseignant doit créer les conditions d'une réelle activité intellectuelle des élèves* [...]. Ils doivent être mis en situation de prendre en charge les différentes tâches associées à la résolution d'un problème :
– faire des hypothèses et les tester ;
– élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle [...] ;
– vérifier par eux-mêmes les résultats obtenus ;
– formuler une réponse dans les termes du problème ;
– expliquer leurs méthodes, les mettre en débat, argumenter. [...]

« Les séances d'enseignement comportent en général différentes phases, avec des modes d'organisation diversifiés. Les phases de *recherche* sont souvent plus efficaces et plus riches si elles sont conduites *en petits groupes*, facilitant la confrontation des idées entre pairs et favorisant l'intérêt de tous les élèves pour la tâche proposée[2]. »

Plusieurs fonctions pour la résolution de problèmes

Quatre types de problèmes sont évoqués et peuvent être associés à des objectifs d'apprentissage différents :
– problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance ;
– problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer ;
– problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances ;
– problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.

Dans ce dernier cas, nous parlons de « problèmes pour chercher » alors que dans les précédents nous parlions de « problèmes pour apprendre », en soulignant l'aspect réducteur de ces dénominations, puisque, dans tous les cas, l'élève mobilise des connaissances et se trouve placé en situation de recherche.

Un épisode de recherche, en actes

10 h – acte 1

La maîtresse partage sa classe de CM1-CM2 en cinq groupes de quatre élèves et un groupe de trois élèves. Installés autour des tables qui ont été rapprochées pour la circonstance, les élèves écoutent la maîtresse présenter le problème qu'ils vont résoudre : « Voici un jeu de cartes. Sur chaque carte est dessiné soit un carré, soit un triangle. » La maîtresse montre les cartes et amène les élèves à remarquer qu'il y a un 4 dans les coins des cartes portant un carré et un 3 dans les coins de celles portant un triangle : c'est le nombre de côtés

1. *Mathématiques, cycle 2* et *Mathématiques, cycle 3*, CNDP, 2002, coll. « École ».

2. Texte commun aux cycles 2 et 3, « Une place centrale pour la résolution de problèmes », *Mathématiques, cycle 2*, *ibid.*, pages 7 et 8.

des figures concernées. « Je vais passer avec mon jeu de cartes et chaque groupe choisira trois cartes, sans les regarder, et les mettra dans cette boîte. » La maîtresse passe dans la classe et chaque groupe met au fur et à mesure ses trois cartes dans la boîte. De retour à son bureau, la maîtresse demande à la classe le nombre de cartes qu'il y a dans la boîte. « On est six groupes et trois cartes par groupe. Il y a donc dix-huit cartes » répondent les élèves les plus rapides. La maîtresse confirme et note cette information au tableau. Elle prend alors les cartes une à une, sans les montrer aux élèves et, en les remettant dans la boîte, elle annonce : « J'ai compté le nombre total de côtés sur les cartes que vous avez choisies et j'en trouve soixante [elle écrit : “60 côtés” au tableau]. Vous devez trouver le nombre de cartes portant des carrés et le nombre de cartes portant des triangles. » La maîtresse indique aux élèves les conditions dans lesquelles ils vont effectuer cette recherche : cinq minutes de recherche personnelle, puis une demi-heure de recherche en groupe. La maîtresse poursuit : « Il faudra donc échanger, discuter des propositions des uns et des autres, et arriver à une seule production qui sera présentée à toute la classe sous la forme d'une affiche. Chaque groupe devra expliquer son affiche. » Et la maîtresse conclut : « Je ne donnerai aucun renseignement pendant votre travail. Je déciderai en temps voulu qui, dans chaque groupe, sera le rapporteur du groupe. Vous avez cinq minutes pour chercher personnellement. »

10 h 15 – acte 2

La recherche personnelle commence. Certains dessinent des triangles et des carrés, d'autres écrivent les informations du tableau comme pour bien s'en imprégner, d'autres posent des opérations ; les uns réfléchissent, d'autres soupirent, d'autres enfin semblent attendre que le travail en groupe commence !

10 h 20 – acte 3

La maîtresse donne le signal du travail en groupe. Les voix s'élèvent, la classe s'anime. On peut entendre çà et là : « c'est pas possible », « on peut pas savoir », « ça dépend », « il faut faire une division ». Les échanges s'engagent dans les groupes. Dans un premier groupe : « Il y a 15 carrés – Non, il doit y avoir aussi des triangles – Oui, mais on ne sait pas combien. » Dans un deuxième groupe : « Il y a 10 triangles et 8 carrés – Non ! Ça fait pas 60 côtés ! – J'essaie avec 10 carrés et 8 triangles… non ça fait 64 côtés – Mets moins de carrés et plus de triangles. » Dans un troisième groupe : « Il y a 20 triangles – Mais non, il n'y a que 18 cartes – Il faut enlever des triangles et mettre des carrés – 4 triangles, c'est comme 3 carrés. » Dans un quatrième groupe : « S'il y a que des carrés, ça fait 72 côtés. Il faut donc enlever 3 carrés ! – Oui mais il faut les remplacer par 3 triangles – Ça fait alors 69 côtés – Il faut continuer ! » Dans un autre groupe : « Si on essayait 9 triangles et 9 carrés ? – Ça fait trop de côtés, 63 – Il faut moins de carrés. »
Les échanges se poursuivent. Les élèves se sont maintenant bien appropriés le problème et s'investissent davantage dans sa recherche. Pendant ce temps, la maîtresse passe discrètement de groupe en groupe, veille à ce que chaque élève participe à la réflexion du groupe, écoute les arguments développés, les affirmations annoncées, regarde les essais sur les feuilles de recherche, mais n'apporte pas d'éléments susceptibles d'orienter le travail des élèves. Certains groupes privilégient le nombre de cartes, d'autres privilégient le nombre de côtés. Ces observations lui permettront de mieux gérer la mise en commun qu'elle va organiser. Mais déjà, elle voit se dessiner des procédures qui peuvent aboutir à la solution.

10 h 40 – acte 4

Non sans difficulté, la maîtresse demande une pause à tous les groupes, pour faire un premier bilan des recherches. Chaque groupe décide de son porte-parole qui indique où en est le groupe, ce qu'il a trouvé. Parfois les propos du rapporteur sont contestés par les élèves de son groupe. Un groupe annonce qu'il a trouvé plusieurs solutions. Un autre affirme que ce n'est pas possible avec 18 cartes. La maîtresse rappelle qu'il y a bien 18 cartes et qu'elle a bien compté 60 côtés. « Il faut faire 60 moins 18 ! » s'exclame un élève, aussitôt contrecarré par ses camarades. Un autre groupe fait remarquer que 4 triangles ont le même nombre de côtés que 3 carrés. Un autre est content d'annoncer que si on change un carré par un triangle, le nombre de cartes reste le même, mais le nombre de côtés diminue de un. La maîtresse annonce alors qu'elle leur laisse un quart d'heure pour finir leur recherche et préparer la présentation de leur proposition sur l'affiche.

10 h 50 – acte 5

Forts de tous les renseignements obtenus à l'occasion de ce premier bilan, les groupes se remettent au travail. Les uns reprennent leur procédure et l'affinent ; d'autres explorent de nouvelles pistes. La maîtresse observe à nouveau les travaux des groupes sans intervenir, seulement pour rappeler à l'ordre des élèves ou des groupes qui gênent le travail de la classe par leur comportement. Elle leur rappelle qu'ils doivent présenter leur proposition sur une affiche et repère les différentes méthodes.

11 h 05 – acte 6

C'est le moment de la mise en commun. La maîtresse désigne le rapporteur de chaque groupe. Celui-ci présente la proposition de son groupe.

Un premier groupe (G1) donne des possibilités de faire soixante côtés : « Que des carrés : $15 \times 4 = 60$; on n'a que 15 cartes. Que des triangles : $3 \times 20 = 60$; on a 20 cartes. On a essayé 12 carrés et 4 triangles puis 9 carrés et 8 triangles. Mais on n'y arrive pas ! »
Un deuxième groupe (G2) a considéré le nombre de côtés avec 10 carrés et 8 triangles : 60 côtés. « 4 côtés en trop, il faut un carré en moins. La réponse est 9 carrés et 8 triangles. »
Un troisième groupe (G3) a supposé que toutes les cartes étaient des triangles. « 18 triangles, ça fait 54 côtés. On a enlevé 6 triangles et on les a remplacés par des carrés pour faire 6 côtés de plus. On a trouvé : 12 triangles et 6 carrés. »
Un autre groupe (G4) a organisé sa recherche en faisant varier le nombre de cartes de chaque figure à partir de 9 triangles et 9 carrés :
– 9 triangles et 9 carrés donnent : $9 \times 3 = 27$ et $9 \times 4 = 36 + 27 = 63$ côtés ;
– 10 triangles et 8 carrés donnent : $10 \times 3 = 30$ et $8 \times 4 = 32 + 30 = 62$ côtés ;
– 11 triangles et 7 carrés donnent : $11 \times 3 = 33$ et $7 \times 4 = 28 + 33 = 61$ côtés ;
– 12 triangles et 6 carrés donnent : $12 \times 3 = 36$ et $6 \times 4 = 24 + 36 = 60$ côtés.
Les autres groupes ont trouvé des solutions voisines, correctes ou non. La maîtresse invite chaque groupe à réfléchir, à noter ses questions et les remarques à faire aux autres groupes, puis lance le débat : « Quelles remarques pouvez-vous faire sur les propositions de vos camarades ? »
Les uns voient l'erreur du groupe G2 : « Ils n'ont pas le bon nombre de cartes ! » D'autres font remarquer, en parlant du groupe G1 : « S'ils avaient continué, ils y seraient arrivés ! » D'autres encore signalent les écritures incorrectes du groupe G4 qui se défend en argumentant du bon nombre de côtés pour chaque cas. C'est l'occasion pour la maîtresse d'ouvrir un débat sur les différents types d'erreurs : erreur dans le choix ou l'exécution de la procédure de résolution pour certains, erreur dans l'écriture de la solution pour d'autres.
D'autres élèves ne comprennent pas la procédure du groupe G3. Les élèves du groupe donnent alors des explications en dessinant des cartes au tableau et en montrant qu'en remplaçant un triangle par un carré, on augmente le nombre de côtés de un sans changer le nombre de cartes.
Le débat se poursuit sur l'unicité de la réponse : « Y a-t-il d'autres cas où on a 18 cartes et 60 côtés ? » La maîtresse relance la recherche sur cette nouvelle question. À l'issue de ce nouveau temps de recherche, deux argumentations s'imposent : celle qui repose sur l'échange d'une carte « carré » par une carte « triangle » (explication du groupe G3) et celle qui repose sur l'exhaustivité (procédure du groupe G4).

11 h 40 – validation et synthèse

Voici le moment tant attendu, celui où on va vérifier la validité de la réponse, même si tous les élèves sont maintenant convaincus de cette réponse. La maîtresse ouvre la boîte et un élève sort les cartes une à une en annonçant au fur et à mesure « triangle » ou « carré ». Un autre élève les comptabilise au tableau. Le compte y est : « 12 triangles et 6 carrés. »
La maîtresse demande enfin s'il était possible de vérifier la réponse sans ouvrir la boîte : $12 + 6 = 18$ prouve que le nombre de figures est correct et $(12 \times 3) + (6 \times 4) = 60$ prouve que le nombre de côtés l'est également. Elle pointe ces égalités comme un autre moyen de prouver la validité de la réponse.
La maîtresse demande maintenant aux élèves ce qu'ils pensent de cette séance de problème. « On savait pas faire et on a trouvé quand même ! », s'étonne un élève. « C'est bien de pouvoir deviner sans voir les cartes », annonce un autre élève. « Et comment avez-vous pu y arriver ? », rebondit la maîtresse. La formulation de réponses complètes à cette question nécessite des relances de la part de l'enseignante, avec des retours sur la phase de résolution. Avec leur propre langage repris par la maîtresse, les élèves évoquent la nécessité de faire des essais et de rectifier les choix en fonction des résultats, c'est ce que nous appellerons les « essais-ajustements ». Ils font remarquer combien il faut être méthodique, organisé, qu'il ne faut pas avoir peur d'écrire des résultats provisoires qui peuvent s'avérer inutiles pour la réponse mais en revanche très utiles pour la recherche. À tout moment, il est nécessaire de contrôler sa proposition pour vérifier si elle respecte les contraintes du problème.

Une semaine plus tard

La maîtresse met en place les six mêmes groupes : « Vous vous souvenez des cartes sur lesquelles étaient dessinés des carrés ou des triangles ? Que fallait-il trouver ? » Les élèves rappellent qu'il y avait 18 figures et 60 côtés et qu'il fallait trouver le nombre de figures de chaque sorte. « Aujourd'hui, chaque groupe va être le propriétaire d'une basse-cour composée uniquement de poulets et de lapins. Je vais indiquer à chaque groupe la composition de sa basse-cour. Notez bien les renseignements. Groupe 1 : 26 têtes et 86 pattes… » Un brouhaha naît aussitôt dans la classe. La maîtresse satisfaite de son effet interpelle les élèves sur le nombre de pattes d'un lapin, d'un poulet, et les élèves se rendent à l'évidence qu'il faudra trouver le nombre d'animaux de chaque sorte. La maîtresse redonne la composition de la basse-cour du groupe 1 puis poursuit avec celles des autres groupes. Pour les groupes 5 et 6, qui avaient eu du mal à résoudre le problème de la semaine précédente, elle a choisi un petit nombre d'animaux et des nombres voisins de poulets et de lapins, ce qui réduit le nombre de cas à envisager : « Groupe 2 :

25 têtes et 66 pattes ; groupe 3 : … ; groupe 5 : 14 têtes et 44 pattes ; groupe 6 : 17 têtes et 48 pattes. » Comme la semaine précédente, les élèves vont chercher individuellement puis en groupe et présenteront leur solution à toute la classe sous la forme d'une affiche. Mais la maîtresse pourra peut-être se dispenser de faire un bilan en cours de recherche.
Les élèves ne manquent pas d'imagination, ni de perspicacité. Il faut seulement leur donner la possibilité de l'exprimer.

Caractéristiques du « problème pour chercher »

« Les situations sur lesquelles portent les problèmes proposés peuvent être issues de la classe, de la vie courante, de jeux, d'autres domaines de connaissances ou s'appuyer sur des objets mathématiques. Elles sont présentées sous des formes variées : expériences concrètes, description orale, support écrit[3]. »
Il ne faut pas en effet négliger cette variété au niveau de la présentation, y compris pour les « problèmes pour chercher ». Un problème n'est pas nécessairement donné sous la forme d'un texte suivi d'une question écrite comme les pratiques les plus courantes pourraient le laisser croire. En effet l'écrit peut déjà être, pour certains élèves, un obstacle à la compréhension de la situation. Or il faut garder à l'esprit que l'objectif essentiel ne se situe pas dans la lecture mais dans la résolution du problème. Le problème peut consister en la fabrication d'un objet (dessins, solides, assemblages…) sous certaines contraintes. Il peut être présenté par une situation mimée dont on demande d'anticiper la suite ou par une question formulée oralement (en particulier au cycle 2).
Les élèves doivent pouvoir s'approprier facilement la situation et se représenter la tâche pour s'y engager avec leurs connaissances antérieures. La difficulté doit se situer non dans la compréhension de la situation, mais dans les moyens de répondre à la question posée.
Le problème peut se situer dans les domaines numérique, géométrique, logique, dans celui de la mesure ou dans plusieurs de ces domaines.
Le problème doit être « consistant », c'est-à-dire présenter une certaine « résistance ». Il ne doit pas donner lieu à une réponse qui résulte d'un traitement immédiatement reconnu. Ainsi, la solution experte du problème décrit dans le récit précédent est la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues qui ne sera étudiée qu'en dernière année du collège.
Donner un problème de recherche, c'est lancer un défi. Il est important que les élèves s'approprient le problème et qu'ils aient envie de relever le défi. De ce point de vue, l'attitude du maître est aussi décisive que le choix du problème. La « mise en scène » qu'il a imaginée conditionne l'engagement des élèves à relever le défi. Cet engagement dans la tâche est souvent plus aisé si les élèves sont persuadés qu'il existe une solution, parce qu'ils ont vu le problème se créer (comme dans l'exemple du problème des cartes) : ils sont ainsi mieux à même de se représenter la situation. Cependant, tous les problèmes ne peuvent pas être proposés dans les mêmes conditions que celui évoqué ci-dessus.
La validation de la solution doit être le plus possible à la charge des élèves. Ils doivent pouvoir se rendre compte par eux-mêmes du bien-fondé ou non de leur réponse, par l'échange d'arguments destinés à défendre ou contredire une proposition, par des contrôles tout au long de leur recherche et, si possible, par une vérification, à la fin, sur la situation elle-même.

Pourquoi des « problèmes pour chercher » à l'école primaire ?

Cinq objectifs différents peuvent être dégagés :
1) La pratique du « problème pour chercher » développe la capacité de l'élève à faire face à des situations inédites.
2) Dans la résolution de ces problèmes, l'élève prend conscience de la puissance de ses connaissances, même si celles-ci sont modestes. Il existe en effet toujours plusieurs moyens d'élaborer une réponse, faisant appel à des registres de connaissances différents : ainsi, dans le problème des cartes, certains élèves peuvent dessiner les figures et dénombrer, d'autres n'utiliser que l'addition et certains combiner toutes les opérations étudiées.
3) L'activité de l'élève dans la résolution d'un « problème pour chercher » valorise des comportements et des méthodes essentiels pour la construction de leurs savoirs : prendre des initiatives (tenter, faire des essais…), être critique vis-à-vis de son travail (contrôler, analyser ses erreurs…), s'organiser, être méthodique (réduire la part du hasard, le nombre de cas à envisager), communiquer (par oral, dans le groupe et face à la classe, par écrit pour rendre compte de sa recherche).
4) Les phases d'échanges et de débats développent les capacités argumentatives de l'élève. Les débats qui s'instaurent soit dans les groupes, soit dans la classe conduisent les élèves à valider ou réfuter une proposition. Un élève qui est persuadé du bien-fondé de son idée, de l'intérêt de la piste qu'il veut explorer ou de la solution qu'il a trouvée, devra

3. *BO* hors-série n° 1 du 14 février 2002, page 82 – cycle 3.

convaincre ses camarades. La raison doit l'emporter sur la passion. Pour cela, le maître gère les débats afin que ce soit la valeur de l'argument qui l'emporte. Ni la force de conviction de celui qui le défend, ni le fait que cet argument soit accepté par la majorité des élèves ne doivent être décisifs quant à la validité d'un argument : en mathématiques, l'accord du plus grand nombre sur une proposition ne constitue pas un critère de sa validité.
5) Ce type d'activité contribue à l'éducation civique des élèves. Les moments de recherche sont plus efficaces si l'on s'entraide : les idées proposées par les uns, même erronées, alimentent celles des autres. Les moments de débat offrent également l'occasion de travailler l'écoute, la prise en compte et le respect d'autrui.

Mise en œuvre du « problème pour chercher »

Plusieurs phases ponctuent, en général, une séance de « problème pour chercher ».

Présentation du problème

Comme cela a été signalé précédemment, le problème peut être communiqué oralement (avec l'aide d'un écrit) ou seulement par écrit (texte, schémas, tableaux, illustrations), avec ou sans matériel. Les élèves ne doivent pas pouvoir résoudre le problème uniquement en manipulant le matériel. En revanche, sa présence peut les aider à se représenter le problème et, à la fin, permettre une vérification pratique de la solution. Il faut en effet veiller à ce que les élèves comprennent la situation et ce qu'il faut chercher pour qu'ils se sentent personnellement engagés pour relever le défi qui leur est lancé.

Temps de recherche personnelle, puis en groupe

Une confrontation personnelle de chaque élève avec le problème est souvent nécessaire (environ cinq minutes). Même si, en apparence, elle est peu productive pour certains, cette phase individuelle initialise le travail de groupe dont l'objectif est de produire une proposition de solution (procédure et réponse) commune. Les échanges à l'intérieur du groupe sont essentiels lors de cette phase, les propositions des uns alimentant celles des autres. Il faut que chacun se sente responsable de la proposition de solution qui sera présentée à la classe par le rapporteur du groupe : à cette fin, le maître choisit le rapporteur seulement au terme de la recherche.

Mise en commun, débat et validation

Cette phase peut se situer à l'issue de la recherche ou dans la séance suivante, ce qui permet à l'enseignant de prendre connaissance des travaux de chaque groupe. Au cours de cette mise en commun, les rapporteurs présentent aux autres groupes leur solution. Les choix du maître dans la désignation des rapporteurs et dans leur ordre de passage [4] reposent sur les observations faites pendant la recherche. Le moment de débat peut être organisé de diverses façons : les échanges peuvent intervenir au fur et à mesure de la présentation des productions ou seulement lorsque toutes les propositions ont été présentées. L'échange autour de plusieurs propositions contribue à enrichir l'argumentation : les élèves peuvent repérer des démarches voisines et confronter celles qui sont différentes.
Il est souhaitable que la validation des propositions soit faite par les élèves eux-mêmes. Dans l'exemple proposé, cette validation peut être confirmée par vérification de la conformité des réponses avec les informations données ou par un contrôle du contenu effectif de la boîte, ce qui contribue à l'intérêt de ce problème. Pour que la validation relève effectivement de la responsabilité des élèves, le maître doit éviter autant que possible de donner un avis d'autorité. Il veille, bien entendu, à une certaine rigueur dans l'expression avec des exigences adaptées au niveau de la classe. Pour cela, il peut questionner, interpeller les uns ou les autres pour inciter les uns à argumenter et les autres à s'interroger sur la validité d'une proposition.

Synthèse

Il s'agit maintenant de conclure la séance, sous forme d'échanges entre le maître et la classe, de valoriser les qualités observées, de dénoncer les défauts, d'ancrer les comportements essentiels et les procédures intéressantes qui pourront être réinvesties dans une prochaine séance de « problème pour chercher ».

Le rôle de l'enseignant

Pendant une séance de « problème pour chercher », le maître n'apporte aucune aide sur la résolution du problème, ce qui ne veut pas dire qu'il est totalement absent de l'activité. Au bout d'un moment, il circule, observe, note des éléments intéressants. Ces observations l'aideront à décider éventuellement d'une courte mise en commun intermédiaire et du

4. Il est peu pertinent de situer en fin de présentation des solutions erronées, à un moment où tout le monde est déjà convaincu par une solution correcte.

choix des travaux les plus intéressants à exploiter collectivement, ainsi que de l'ordre le plus pertinent pour cette exploitation. Le maître ne doit pas aider personnellement les élèves afin qu'ils n'attendent pas systématiquement un coup de pouce de sa part. Des aides peuvent venir des élèves eux-mêmes. Par exemple, un premier mini-débat peut être instauré, dans le but de porter à la connaissance de tous les groupes les différentes recherches, de les amener à avoir un regard critique sur leur propre recherche et de les redynamiser si leur recherche piétine. Pendant les phases de débat, le maître doit plutôt se placer au milieu des groupes ou en fond de classe pour que les échanges se fassent réellement entre les élèves et non pas entre le maître et les élèves.

Prolongement

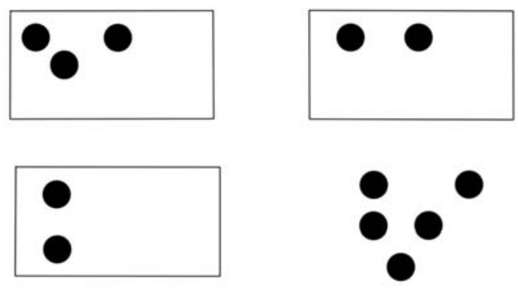
Certains groupes auront résolu le problème, d'autres non. Pour exploiter pleinement une telle séance, le maître peut « rebondir » sur cette recherche et proposer dans une séance ultérieure des problèmes du même type mais avec des données adaptées aux difficultés rencontrées par les groupes lors de leur recherche. Forts des procédures discutées précédemment, ils peuvent utiliser, éventuellement en l'améliorant, leur proposition de solution antérieure, en choisir une autre ou en élaborer une nouvelle. Les groupes qui n'avaient pas abouti ont l'occasion de progresser. Il est également possible, dans cette phase, de procéder à une redistribution des groupes.

Des « problèmes pour chercher » à l'école primaire

La pratique du « problème pour chercher » n'est pas réservée aux élèves du cycle 3. Bien au contraire, dès l'école maternelle, et ensuite au cycle 2, cette pratique doit être encouragée.

À l'école maternelle

La plupart des questions posées aux élèves de l'école maternelle sont des « problèmes pour chercher ». En effet, les élèves ont, à ce moment de leur scolarité, encore construit peu de connaissances mathématiques. Pour traiter les problèmes qui leur sont proposés, ils doivent donc se débrouiller et faire preuve d'inventivité.
Ainsi, un élève de moyenne section doit compléter ces trois cartons (où des gommettes sont déjà collées) en utilisant tout le tas de gommettes mis à disposition afin que chacun comporte à la fin exactement autant de gommettes que les deux autres. Il aura pu auparavant résoudre un problème identique lié à la vie de la classe, avec des objets déplaçables (par exemple, égaliser le contenu de trois assiettes, avec des biscuits).



Cet élève ne dispose que de la capacité à comparer des collections par correspondance terme à terme ou, peut-être, de la capacité à les dénombrer par comptage un par un. Il est donc peu probable qu'il puisse anticiper le résultat ; la seule possibilité pour lui consiste à poser les gommettes sur les cartons, à contrôler si la contrainte d'équité est respectée et à procéder à des ajustements… ou à enlever les cinq gommettes qu'il vient de placer pour se lancer dans une nouvelle tentative.
Un élève de grande section peut être confronté à une situation identique, mais dans laquelle les cinq gommettes ne sont pas directement à sa disposition. Elles sont, par exemple, affichées au tableau et il doit indiquer sur chaque carton combien il doit coller de gommettes supplémentaires (ou bien les dessiner). Alors que la situation dans sa version « moyenne section » n'est peut-être plus pour lui un problème de recherche, car il peut produire la bonne solution rapidement, la nouvelle contrainte imposée l'oblige à un travail d'anticipation et à un maniement simultané des nombres et des quantités qui transforment la situation en un nouveau « problème pour chercher ».
À l'école maternelle, les élèves ne sont pas tous capables d'expliciter les démarches utilisées. Ils peuvent en revanche être invités à « refaire l'action devant leur camarade », l'enseignant accompagnant, à ce moment, l'élève par le langage, offrant ainsi une verbalisation « en miroir ». Cependant, les élèves deviennent progressivement capables de repérer une réponse erronée et de dire pourquoi elle ne convient pas.

Au cycle 2

Les « problèmes pour chercher » ont une importance toute particulière au cycle 2. Ils donnent aux élèves des occasions de prendre conscience que les premiers outils mathématiques qu'ils se sont appropriés leur permettent de traiter des problèmes « difficiles », leur résolution ne se limitant pas à l'application des connaissances étudiées. Ainsi, des élèves de deuxième année (ou même de troisième année) de cycle 2 peuvent être invités à chercher plusieurs façons (voire toutes les façons) de répartir 34 objets dans des boîtes qui peuvent contenir 4 ou 6 objets.

Ils deviennent progressivement capables de rendre compte de la démarche utilisée en s'appuyant sur la trace écrite qu'ils ont élaborée et à repérer des erreurs dans la solution d'un autre élève. Ils ont souvent des difficultés à reconnaître que deux solutions sont identiques quand elles sont présentées différemment : il appartient à l'enseignant de les aider dans ces rapprochements. Les échanges entre élèves, au cours de la mise en commun, sont encouragés, mais l'enseignant est souvent amené à reformuler une proposition et à assurer le maintien de la discussion autour de celle-ci.

Au cycle 3

La gamme des problèmes possibles s'élargit. Les élèves deviennent capables de s'investir davantage dans la phase d'échange et de débat autour des démarches produites. Le travail sur l'argumentation s'enrichit. Défendre une proposition ou la contester deviennent de véritables enjeux, au cours des mises en commun, l'enseignant se limitant à organiser le débat, à permettre l'expression, la confrontation des points de vue et l'émergence d'éléments de preuve. Cette phase, difficile, est essentielle pour que les élèves entrent dans un débat scientifique et s'en approprient progressivement les règles. Elle ne se déroule pas nécessairement sur toute sa durée sous forme collective. Souvent, l'implication des élèves doit être relancée, l'enseignant les invitant à discuter par petits groupes, pendant un court moment, d'une proposition clairement identifiée et formulée avant de reprendre l'échange collectif.

Exemples de « problèmes pour chercher »

Les trois exemples qui suivent de « problèmes pour chercher » sont propices à la mise en œuvre de trois types de raisonnements différents à l'école élémentaire.

Problème dont la résolution peut être faite par essais

La tirelire
Dans ma tirelire, j'ai 32 pièces et billets.
Je n'ai que des pièces de 2 € et des billets de 5 €.
Avec ces 32 pièces et billets, j'ai 97 €.
Combien y a-t-il de pièces de 2 € et de billets de 5 € dans ma tirelire ?

Groupe Ermel (CM2).

Ce problème peut être résolu par essais et ajustements, comme le problème des carrés et des triangles. Il nécessite de savoir prendre en compte l'information apportée par les essais successifs pour engager un nouvel essai. Une procédure par essais systématiques est également possible, par exemple en faisant évoluer le nombre de pièces de 2 € de un en un.

Problème dont la résolution nécessite une organisation pour obtenir toutes les possibilités

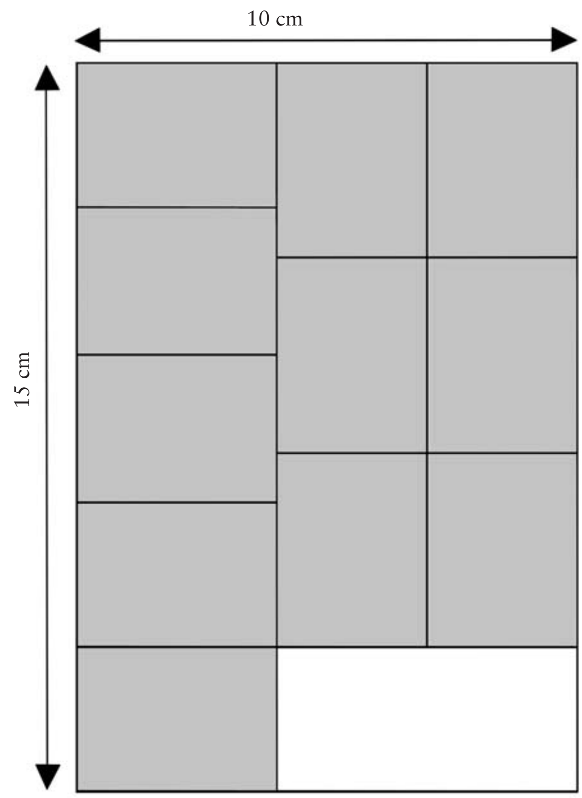
Les glaces
Trouve tous les mélanges possibles de glaces à trois boules différentes, avec cinq parfums : citron, vanille, chocolat, fraise, pomme.

O.C.C.E. Aube, « Les écoles qui mathent », mai 1998
(fin de cycle 2 ou cycle 3).

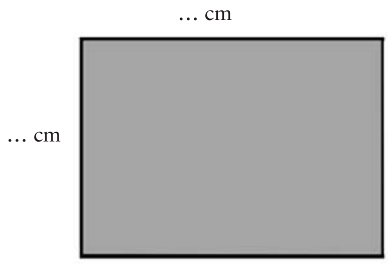
Ce type de problème encourage l'organisation de solutions pour s'assurer de leur exhaustivité. Par exemple, fixer la première boule sur « citron », puis la deuxième sur « vanille » et explorer toutes les possibilités pour la troisième. Puis, en gardant la première sur « citron », fixer la deuxième sur « chocolat » et explorer à nouveau les possibilités pour la troisième (en évitant de répéter un assortiment déjà trouvé)…

Problèmes dont la résolution privilégie le recours à la déduction

Sophie veut découper des étiquettes rectangulaires toutes identiques dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 10 cm et 15 cm. Elle en a déjà tracé 11 comme tu peux le voir sur le dessin.



Calcule les dimensions réelles d'une étiquette et indique-les sur le dessin ci-dessous.



D'après l'évaluation à l'entrée en sixième, 1999, exercice 29.

Ce troisième problème met l'accent sur une compétence trop peu valorisée actuellement à l'école primaire : la déduction et l'organisation des étapes d'une résolution. Il faut, en effet d'abord déterminer la largeur d'une étiquette (à partir de l'information 15 cm qui correspond à « cinq largeurs »), puis en déduire sa longueur (à partir de l'information 10 cm qui correspond à « deux largeurs et une longueur »).
La plupart des problèmes sont propices à plusieurs types de raisonnements. Ainsi, le problème suivant peut aussi bien être résolu par essais et ajustements que par une démarche déductive.

Les croquettes
100 croquettes ont été réparties dans 5 assiettes.
Dans la 1re et la 2^{e} assiettes, ensemble, il y a 52 croquettes.
Dans la 2^{e} et la 3^{e} assiettes, ensemble, il y a 43 croquettes.
Dans la 3^{e} et la 4^{e} assiettes, ensemble, il y a 34 croquettes.
Dans la 4^{e} et la 5^{e} assiettes, ensemble, il y a 30 croquettes.
Combien de croquettes y a-t-il dans chaque assiette ?
2^{e} rallye mathématique romand, 1994 (fin de cycle 2 ou cycle 3).

Où trouver de tels problèmes ?

La pratique du problème pour chercher commence à se développer sous plusieurs formes :
– certains manuels intègrent de tels problèmes à leur progression ;
– des travaux de recherches (comme ceux de l'équipe Ermel de l'INRP) fournissent également des exemples de mise en œuvre ;
– certaines productions de la Copilerem ou des revues pour les enseignants (comme la revue *Grand N*, éditée par l'IREM de Grenoble ; par exemple, un numéro spécial de cette revue, « Points de départ », 2003, propose des « Activités et problèmes mathématiques pour les élèves du cycle 3 ») ;
– les concours et les rallyes mathématiques organisés dans plusieurs régions de France ou dans d'autres pays sont une autre source d'inspiration pour l'enseignant : ces problèmes sont souvent disponibles sur Internet et peuvent être trouvés en utilisant un moteur de recherche. La revue suisse *Math-école* publie également les épreuves du rallye mathématique transalpin.

Résolution de problèmes et apprentissage

Les textes introductifs des documents d'application pour les cycles 2 et 3 évoquent, à propos de la résolution de problèmes, la distinction entre solutions personnelles et solutions expertes.
L'objectif de ce chapitre est d'apporter quelques précisions à ce sujet, afin de clarifier ce que recouvrent ces deux expressions, de préciser comment elles permettent de repenser les enjeux de l'activité de résolution de problèmes et d'indiquer quelques pistes pour un travail orienté vers un apprentissage de nouvelles connaissances, donc pour aider les élèves à s'approprier un mode de résolution expert en prolongement ou en rupture des modes de résolution personnels mobilisés auparavant.

Solution personnelle, solution experte

Dans le document d'application des programmes, le terme « solution » est utilisé dans un sens peut-être un peu inhabituel. Il ne désigne pas la réponse à un problème, mais la stratégie, la démarche et les procédures mises en œuvre pour y parvenir. C'est également la signification que nous lui donnons ici.
Voici deux exemples de problèmes destinés à des élèves de la fin du cycle 3 et qui permettent de préciser la distinction entre solution personnelle et solution experte.

Problème 1

Emma a un paquet de bonbons.
Elle donne 8 bonbons à chacun de ses 5 camarades. Il lui en reste 3.
Combien y avait-il de bonbons dans le paquet ?

Évaluation à l'entrée en sixième, 2002.

On attend d'un élève de fin de cycle 3 qu'il détermine les deux étapes de la résolution : déterminer le nombre de bonbons donnés, puis le nombre de bonbons qu'il y avait dans le paquet. À partir de là, on attend que, pour calculer le nombre de bonbons distribués, il utilise le produit de 8 par 5 (mémorisé) et qu'il additionne ensuite 40 et 3 pour fournir la réponse. Il utilise alors le même raisonnement et les mêmes calculs que ceux qu'utiliserait une personne experte. On parle alors de « solution experte ».
S'il a compris la situation et la question posée et si, pour la première étape, il ne reconnaît pas que le recours au produit de 8 par 5 est efficace (ou s'il a oublié le résultat), il peut utiliser d'autres modes de résolution, comme calculer 8 + 8 + 8 + 8 + 8 ou même schématiser les 5 groupes de 8 bonbons et procéder à un dénombrement. Il utilise un mode de résolution correct, mais différent de celui mis en œuvre par une personne experte. On parle alors de « solution personnelle ».
On peut être étonné que, étant donné la variété et la « simplicité » des connaissances mathématiques mises en jeu aussi bien dans la solution experte que dans les solutions personnelles, plus d'un quart des élèves soient en difficulté face à ce problème. Une hypothèse plausible peut être avancée : ne reconnaissant pas immédiatement quelle solution experte peut être utilisée, certains élèves n'envisagent pas ou n'osent pas se lancer dans l'élaboration d'une solution personnelle.

Problème 2

Les élèves d'une école ont réalisé une grande fresque de forme carrée en assemblant 196 petits tableaux réalisés sur des panneaux de bois tous identiques et eux aussi de forme carrée.
Combien de panneaux y a-t-il sur chaque côté de la fresque ?

S'ils comprennent la situation, les élèves de fin de cycle 3 disposent de connaissances sur la multiplication qui leur permettent d'envisager que la réponse est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 196. Mais ils ne disposent pas encore de la notion de racine carrée ; ils ne peuvent donc pas utiliser la solution experte qui consiste, par exemple, à utiliser la touche [÷] d'une calculatrice.

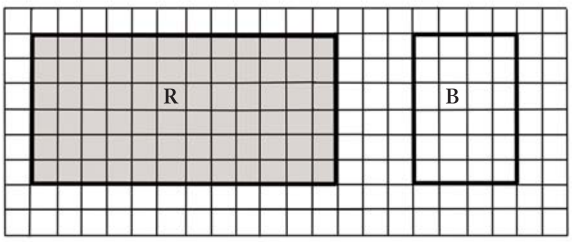
Ils peuvent cependant résoudre ce problème en mobilisant des connaissances disponibles, par des essais de produits, par des essais de sommes itérées d'un même terme (avec le risque de ne pas aboutir !) ou même en tentant une schématisation de la fresque. Ils ont donc, à ce moment de leur scolarité, nécessairement recours à des solutions personnelles pour traiter ce problème qui peut être classé dans la catégorie des « problèmes pour chercher ».
La distinction entre solution personnelle et solution experte semble donc simple. En réalité, elle l'est moins qu'il n'y paraît.
D'autres paramètres que les connaissances utilisées sont en effet à prendre en compte pour déterminer le caractère expert d'une solution, comme le montrent les deux problèmes suivants.

Problème 3

Un autocar qui peut transporter 60 personnes est complet. 45 adultes y sont installés. Tous les autres passagers sont des enfants.
Combien y a-t-il d'enfants dans l'autocar ?

Une personne experte calcule mentalement soit le complément de 45 à 60, soit la différence entre 60 et 45 : ce sont donc deux solutions expertes. Il n'existe donc pas nécessairement une seule solution experte pour un problème déterminé !
Si le même problème était posé avec un train, lui aussi complet, qui peut transporter 926 personnes et dans lequel sont déjà installés 389 adultes, un expert muni d'une calculatrice (ou d'une feuille de papier et d'un crayon) utiliserait sans doute la soustraction et non le complément.
Une personne experte est ainsi capable de choisir entre plusieurs résolutions possibles celle qui est la plus efficace, en sachant que, dans certains cas, différentes résolutions présentent le même niveau d'efficacité. L'expertise de cette personne se caractérise par le fait qu'elle est capable :
– de reconnaître la validité de plusieurs résolutions différentes, et donc leur équivalence du point de vue de leur adéquation au problème posé ;
– de juger de l'économie de chaque solution pour faire un choix adapté

Problème 4



Complète la phrase ci-dessous à l'aide d'une fraction choisie dans la liste suivante :

$$\frac{1}{10} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4}$$

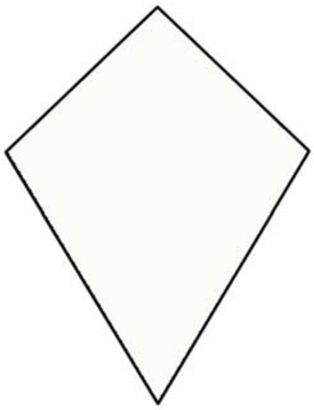
L'aire du rectangle B est égale à … de l'aire du rectangle R.

D'après l'évaluation à l'entrée en sixième, 2000.

Là encore, compte tenu des dimensions et de la disposition des rectangles, un expert pourrait avoir recours à au moins deux solutions différentes (donc toutes deux considérées comme solutions expertes) :
– dénombrer le nombre de carreaux sur la longueur du rectangle R et le nombre de carreaux sur la largeur du rectangle B, puis déterminer le rapport de ces longueurs ;
– paver rapidement (à main levée) le rectangle R avec le rectangle B, puis déterminer le rapport de ces aires.

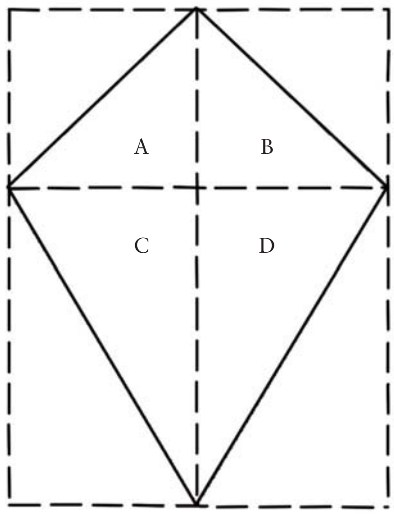
Encourager l'initiative

Depuis de nombreuses années, les programmes insistent sur la diversité des fonctions didactiques attribuées à la résolution de problèmes. Cependant, la tradition scolaire lui confère une place bien particulière, souvent limitée au « problème d'application » que l'élève doit être capable de résoudre de manière experte, les connaissances nécessaires à cette résolution experte ayant été étudiées préalablement. Cet état de fait n'est pas sans conséquence. Il peut expliquer en partie qu'à l'âge de quinze ans, les élèves français obtiennent, en mathématiques, « des résultats supérieurs à la moyenne de l'OCDE lorsqu'il s'agit d'exercices purement scolaires, mais cela n'est plus le cas lorsque la situation nécessite une prise d'initiative[1] ».
L'exemple suivant illustre comment il est possible de travailler, à l'école primaire, cette capacité à « prendre des initiatives ».
Il existe une formule qui permet d'obtenir l'aire d'un cerf-volant en calculant le demi-produit des longueurs de ses diagonales.



1. Note d'information 01.52 de la direction de la programmation et du développement : « Les élèves de quinze ans. Premiers résultats d'une évaluation internationale des acquis des élèves (PISA) ».

Mais, un novice, comme l'est un élève de CM2 pour ce problème, doit imaginer une méthode « originale ». Aidé ou non par l'enseignant qui se limite dans un premier temps à recueillir les différentes suggestions de la classe, il peut, par exemple, penser à inscrire le cerf-volant dans un rectangle, en faisant apparaître ses diagonales.



À partir de là, il existe plusieurs façons d'obtenir l'aire cherchée :
– calculer la somme des aires de quatre triangles rectangles, eux-mêmes reconnus comme des demi-rectangles ;
– considérer que les aires des surfaces A et B sont égales et que la somme de leurs aires est la même que celle du rectangle situé « en haut, à gauche » ; puis appliquer le même raisonnement pour les surfaces C et D ;
– remarquer que l'aire du cerf-volant est égale à la moitié de celle du rectangle dans lequel le cerf-volant est « inscrit ».

Autant de solutions personnelles valides, imaginables et compréhensibles par des élèves de CM2. La dernière citée pourrait facilement être exploitée pour mettre en évidence la « formule », mais ce n'est pas l'objectif poursuivi. Il est plus intéressant, à ce niveau de la scolarité, de permettre aux élèves de prendre conscience qu'avec des connaissances réduites, de l'initiative et de l'imagination, il est possible de venir à bout de problèmes qui paraissent au départ complexes.

Concernant la résolution de problèmes, deux types d'objectifs complémentaires doivent donc être visés :
– rendre l'élève expert dans la résolution de certains problèmes pour lesquels il reconnaît rapidement le traitement approprié[2] ;
– rendre l'élève capable d'initiative pour d'autres problèmes, c'est-à-dire capable d'imaginer des solutions originales, de les tester et, en raisonnant, d'adapter ses connaissances pour traiter la situation proposée de manière personnelle, originale.

L'apprentissage des solutions expertes

Le plus souvent, l'élève ne passe pas spontanément des solutions personnelles aux solutions expertes. Ce passage nécessite un apprentissage et donc l'organisation de situations d'enseignement.

Ainsi, pour la catégorie de problèmes représentée par le problème 3 (recherche d'un complément), le programme prévoit qu'il doit pouvoir être résolu par des procédures personnelles à la fin du cycle 2 et que la résolution experte relève donc du cycle 3.

Rappelons l'énoncé du problème 3 : « Un autocar qui peut transporter 60 personnes est complet. 45 adultes y sont installés. Tous les autres passagers sont des enfants. Combien y a-t-il d'enfants dans l'autocar ? »

La question se pose donc de savoir comment aider les élèves, en première année de cycle 3, à reconnaître que ce type de problème peut être résolu à l'aide d'une soustraction alors qu'ils l'envisagent « naturellement » plutôt comme un « problème d'addition », qui peut être modélisé par : « Combien faut-il ajouter à 45 pour obtenir 60 ? » La résolution experte attendue (60 – 45 = ?) va donc à l'encontre de cette résolution « naturelle ».

Constater que les deux calculs aboutissent au même résultat, même si ce constat peut aider à comprendre l'équivalence du traitement, ne suffit en général pas à rendre fonctionnelle l'équivalence entre : « Combien de 45 à 60 ? » et « Quel est le résultat de 60 moins 45 ? »

La question devient : comment provoquer les élèves à « penser » eux-mêmes cette équivalence ? Trois types d'expériences peuvent être suggérées.

L'appui sur des situations

Le premier type d'expériences s'appuie sur le fait que les élèves ont construit, au cycle 2, une signification élémentaire de la soustraction en résolvant des problèmes dans lesquels est demandé le résultat d'un retrait ou d'une diminution. Pour le type de problème considéré (recherche d'un complément), il est intéressant de les inciter à formuler un raisonnement au terme duquel le problème initial est transformé en un problème qu'ils savent résoudre à l'aide d'une soustraction. Ce raisonnement, exprimé verbalement, consiste à considérer, par exemple, que lorsque l'autocar est plein (avec 60 personnes), pour ne garder que les enfants, il faut faire descendre (donc retirer) les 45 adultes : le calcul 60 – 45 permet de prévoir le résultat de cette nouvelle action. Pour certains élèves, cette explication verbalisée peut être suffisante, mais ce n'est sans doute pas le cas pour tous.

2. En fin de cycle, ce sont les problèmes qui sont placés dans le paragraphe « Procédures expertes » des documents d'application.

Le recours à une expérience réelle, comme celle qui est exposée ci-après, est souvent utile pour soutenir cette explication. L'enseignant dispose d'une boîte dans laquelle il demande à un élève de mettre 37 cubes. Ensuite, devant les élèves, il prend sur le bureau une nouvelle poignée de cubes (sans dire combien aux élèves) qu'il met également dans la boîte. Après avoir dénombré les cubes contenus dans la boîte et annoncé le résultat (52 cubes), il demande aux élèves de trouver combien de cubes il a lui-même mis dans la boîte. La plupart d'entre eux ont recours à des solutions personnelles consistant à rechercher le complément de 37 à 52, soit en dessinant les cubes, soit en recourant à un calcul qui leur permet de trouver ce qu'il faut ajouter à 37 pour obtenir 52. Une écriture, utilisée par certains, peut être associée à cette résolution : 37 + … = 52.
L'interrogation porte ensuite sur la validation des réponses trouvées : comment faire pour n'avoir dans la boîte qu'une quantité de cubes correspondant à celle qui a été ajoutée par l'enseignant.
L'idée sera certainement émise qu'il suffit de retirer de la boîte 37 cubes. Incités à chercher le nombre de cubes que contient alors la boîte (avant de le vérifier effectivement), il est probable que certains élèves calculeront 52 – 37.
Ainsi, deux écritures peuvent être associées à la recherche de la réponse au problème initial, l'une de type « recherche de complément » qui correspond au problème posé au départ, l'autre de type « soustraction » qui correspond au problème posé au moment de la validation.
Le commentaire formulé par l'enseignant prend alors tout son sens : pour chercher le nombre de cubes qui ont été ajoutés dans la boîte, on peut soit penser aux cubes qu'on a ajoutés et chercher le nombre qui, ajouté à 37, permet d'obtenir 52, soit imaginer qu'on enlève 37 cubes de la boîte et chercher le résultat de 52 – 37.

L'appui sur le calcul mental

Le deuxième type d'expériences concerne le calcul mental. Deux exemples suffisent pour l'évoquer :
– si on demande de calculer mentalement 100 – 98, la solution la plus simple consiste à chercher le complément de 98 à 100 plutôt qu'à essayer de soustraire 98 de 100 : les élèves qui y ont recours utilisent alors « en actes » l'équivalence entre calcul d'une différence et recherche d'un complément : l'échange entre les élèves qui ont tenté des résolutions différentes permet de mettre en évidence que les deux procédures sont possibles, mais que la première est plus économique ;
– inversement, si on demande de calculer mentalement le complément de 5 à 200, la solution la plus simple consiste à soustraire 5 de 200 : la même équivalence a été utilisée.

Ainsi demander de calculer une différence de faible écart (exemple 100 – 98) ou un complément d'un nombre à un autre beaucoup plus grand (de 5 à 200) serait propice à la construction des équivalences entre calcul d'une différence et recherche d'un complément.
Ces activités de calcul mental doivent être accompagnées de formulations orales qui aident à les rendre intelligibles : « Que faut-il ajouter à 45 pour avoir 60 ? Quel nombre obtient-on en soustrayant 45 de 60 ? Quelle est la différence entre 45 et 60 ? »
Les questions peuvent être posées directement sur les nombres ou à partir de « petits problèmes » que les élèves doivent résoudre mentalement.

L'appui sur les écritures symboliques

Le premier type d'expériences (à partir d'une matérialisation de la situation) permet de justifier l'équivalence alors que le deuxième type (calcul mental) permet de la faire fonctionner. Dans le prolongement de ces expériences, la mise en relation des écritures symboliques permet d'exprimer cette équivalence.
Il est possible d'utiliser des exercices utilisant des supports comme les petits tableaux ci-dessous avec des consignes du type : « Trouve la règle et complète les cases vides. »

<table><tr><td>10</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="2">15</td></tr></table>

<table><tr><td>5</td><td>17</td></tr><tr><td colspan="2">22</td></tr></table>

<table><tr><td>23</td><td>18</td></tr><tr><td colspan="2">41</td></tr></table>

<table><tr><td>12</td><td>26</td></tr><tr><td colspan="2"></td></tr></table>

<table><tr><td>14</td><td></td></tr><tr><td colspan="2">23</td></tr></table>

<table><tr><td></td><td>25</td></tr><tr><td colspan="2">42</td></tr></table>

Ils peuvent être prolongés par un travail sur les écritures, comme par exemple : « Pour chaque tableau, trouver toutes écritures additives ou soustractives avec les trois nombres » :
10 + 5 = 15, 5 + 17 = 22, etc.,
5 + 10 = 15, 22 – 5 = 17,
15 – 5 = 10, 22 – 17 = 5,
15 – 10 = 5.
La demande de formulations orales qualifiant le nombre à chercher dans chaque tableau aide aussi les élèves à relier entre elles différentes significations. Par exemple, pour le cinquième tableau :
– Quel est le nombre qui, ajouté à 14, donne 23 ?
– Quel est le complément de 14 à 23 ?
– Quel est le nombre différence de 23 et 14 ?
– Quel est l'écart de 14 et de 23 ?
Des exercices systématiques de ce type ne peuvent suffire seuls ni à faire comprendre, ni à rendre fonctionnelle l'équivalence étudiée. Mais associés aux deux autres types d'expériences, ils contribuent à la construction et à la consolidation de cette équivalence.

Cependant, tous les élèves ne construisent pas cette équivalence au même moment et il faut admettre que, même après avoir été confrontés à ces types d'expériences, certains continuent à recourir à des solutions personnelles pour résoudre certains problèmes alors que d'autres pensent à utiliser directement la solution experte.

L'idée de solution personnelle permet d'envisager que chaque élève gagne progressivement en autonomie dans la résolution des problèmes.

Elle permet aux élèves de prendre conscience qu'ils sont capables de résoudre des problèmes inédits, qu'ils n'ont pas encore rencontrés et pour lesquels ils ne disposent pas de solution déjà éprouvée. Les solutions peuvent être « inventées[3] ».

Elle incite aussi à accepter et valoriser la différence. Un problème peut être reconnu comme « problème d'application » par certains alors que d'autres ne parviennent pas à le situer dans une catégorie déjà rencontrée. Ils savent qu'ils peuvent le résoudre comme un problème nouveau, en élaborant une solution de façon originale : ils ne sont alors pas démunis.

La mise en œuvre de cette idée, en classe, suppose, entre autres, que l'on renonce à exiger une forme de présentation stéréotypée de la solution du type :

Solution	Opération

Une présentation plus ouverte peut être envisagée, par exemple :

Recherche	Conclusion

Pour certains problèmes, l'enseignant doit aider les élèves à s'approprier un mode de résolution expert. Ce n'est pas le produit d'un apprentissage spontané : des activités, organisées en progression, doivent être proposées aux élèves par l'enseignant.

3. Voir à ce sujet le chapitre « Des problèmes pour chercher » du présent document, page 7.

Vers les mathématiques – quel travail en maternelle ?

Le programme pour l'école maternelle ne comporte ni partie mathématiques, ni autres parties disciplinaires. Cependant, il est possible de repérer dans la rubrique « Découverte du monde », des propositions d'activités et des compétences qui trouveront un prolongement dans les apprentissages mathématiques ultérieurs. En effet, les enfants n'attendent pas le cycle 2 pour utiliser un mode de pensée mathématique et commencer à élaborer leurs premières connaissances dans ce domaine.
L'objectif de ce chapitre est de fournir aux enseignants d'école maternelle des repères pour baliser leur enseignement et leur permettre de mieux en assurer l'articulation avec leurs collègues du cycle 2.
Comme les autres activités du domaine découverte du monde, celles qui peuvent être reliées aux mathématiques contribuent à l'approche d'une culture générale équilibrée, au développement de compétences transversales (s'exprimer, communiquer, coopérer…) et à l'installation des fondements d'une pensée scientifique et logique, conditionnée par le développement des capacités à identifier des ressemblances et des différences, à comparer, à effectuer des classements ou des rangements, à désigner et à symboliser, à repérer et utiliser des rythmes, à opérer de premières déductions. Ces activités de comparaison, de classement, de sériation, de désignation, d'organisation doivent répondre à des besoins ou à des questions qui ont du sens pour l'enfant : rangements usuels, fabrications d'objets de tous ordres (par exemple, sculpture, lego, lettre aux parents), conservation d'une trace pour se souvenir, recherche d'intrus ou d'objets manquants. Des indications plus précises sont fournies à ce sujet dans la deuxième partie de ce document.

Organisation pédagogique

L'organisation pédagogique des activités peut s'inspirer de quelques points de repères relativement constants, évoqués ci-après.

Offrir aux élèves un environnement riche

Organisées en ateliers, sous forme d'« espaces » aménagés pour un travail autonome (espace cuisine, espace lego…) ou sous forme collective, les activités proposées doivent s'appuyer sur un matériel riche et varié : objets « tout venant », jeux, supports fabriqués par l'enseignant ou par les enfants… Un équilibre doit être trouvé entre les occasions où l'activité est spontanée et celles dans lesquelles elle est provoquée par un questionnement de l'enseignant.
D'une manière générale, les activités doivent correspondre à des centres d'intérêt des enfants. Les activités gratuites, non motivantes, sans rapport avec ce que vivent les enfants sont évitées. En particulier, la place des activités papier/crayon doit être limitée. Sans intérêt pour les enfants de petite section, elle doit être réduite en moyenne section et rester modeste en grande section. Ces activités papier/crayon ne se justifient que si elles sont en lien avec un vécu (action effective, jeu…) qu'elles accompagnent ou qu'elles prolongent pour en garder une trace figurative ou symbolique.

Aider les élèves à s'approprier une tâche

Lorsqu'il ne se situe pas dans le cadre d'une activité déjà familière aux enfants, le seul énoncé d'une consigne permet rarement aux enfants de s'approprier correctement la tâche proposée. Le recours au mime ou à un médiateur (marionnette), l'utilisation d'exemples et de contre-exemples, l'exposition (momentanée ou non) de l'objet attendu ou la reformulation par des enfants constituent autant de moyens de favoriser l'appropriation des éléments du contexte, de ses contraintes et du problème à résoudre.
Dans certains cas, la richesse du matériel et les contraintes qu'il comporte permettent aux enfants de formuler des hypothèses sur les tâches possibles, l'enseignant précisant ensuite celle qui est retenue.

Proposer des problèmes pour développer l'activité opératoire

Dans certaines circonstances, le questionnement spontané ou provoqué à partir de situations familières, ludiques ou aménagées spécialement par l'enseignant, place les jeunes enfants en situation de résolution de problème : la réponse n'est alors pas disponible d'emblée et son élaboration nécessite dans un premier temps des actions de la part de l'enfant, puis progressivement une anticipation sur l'action à réaliser, le recours à des essais et des ajustements… Bien entendu, l'ampleur des problèmes et le type de réponse attendue (production d'un objet, réponse verbale, formulation par un écrit figuratif ou symbolique) évoluent avec l'âge des enfants, avec les connaissances dont ils disposent et également avec leur capacité à maintenir l'intérêt pour une question clairement perçue comme problématique.
Stimulé par le plaisir du jeu, de l'action, de l'exploration, l'enfant se familiarise progressivement avec les contraintes imposées par l'adulte dans certaines situations (règles d'un jeu, équité d'un partage…). Guidé par la réussite ou par l'échec de son projet (ou de celui qu'on lui a fait partager), stimulé par l'enseignant qui veille à ce que le découragement ne s'installe pas, l'enfant développe des stratégies intelligentes par tâtonnement et régulation. Progressivement, il devient capable d'anticiper certaines décisions d'une part et d'expliquer, avec ses mots, son intention ou encore les raisons d'un échec ou d'une réussite d'autre part.

Inciter les élèves à échanger et à collaborer

L'entraide lors de certaines phases d'un projet commun, le partage des découvertes, le constat et l'acceptation de l'échec ou de la réussite, l'échange spontané ou provoqué sur leurs causes possibles et sur la proposition d'une autre façon de procéder… contribuent à apprendre à connaître l'autre, à l'accepter, à l'apprécier, à le respecter et à mesurer l'importance de la collaboration.

Aider à la structuration des acquisitions

Les connaissances se forgent autant par l'activité et son observation que par la verbalisation de l'action, son examen critique, sa mise en relation avec d'autres expériences vécues à l'école ou dans la famille. Le langage et différentes sortes de représentations (maquettes, dessins, schémas, symboles) contribuent à structurer ces connaissances et à les mémoriser. Les formulations orales qui accompagnent l'observation et l'action de l'enfant, soutenues par l'enseignant, constituent une aide à la prise de conscience de certaines questions ou de certaines régularités.

Évaluer les acquis

À l'école maternelle, tous les enfants ne progressent pas de la même manière : ils n'élaborent leurs connaissances ni par les mêmes voies ni au même moment. La prise d'information sur le comportement des enfants face aux tâches proposées et sur les compétences qu'ils manifestent dans leur réalisation est donc primordiale pour adapter au mieux les situations proposées. Pour cela, les activités papier-crayon constituent rarement un moyen pertinent. L'observation, au cours d'un jeu, au cours d'une activité en atelier ou collective, voire dans la cour de récréation, offre des occasions suffisantes pour cette prise d'information, à condition d'avoir clairement défini ce que l'on souhaite évaluer. L'utilisation d'une liste de compétences, en certaines occasions, peut aider à préciser les observations (voir, page 30, un exemple de liste proposé par l'INRP pour le repérage de certaines compétences numériques).

Penser les apprentissages sur le long terme

Les travaux relatifs aux différents domaines évoqués dans ce document, entrepris dès le début de l'école maternelle, concernent des apprentissages qui se prolongent au cycle 2. C'est donc dans une perspective longue qu'il convient de les envisager. L'enseignant de maternelle doit avoir conscience de l'importance et de la portée des acquis qui se structurent peu à peu. Celui de cycle 2 doit, lui, avoir le souci de repérer et de prendre en compte tout ce qui a été construit par l'enfant pendant ces premières années, en en identifiant les points forts et ceux qui restent à consolider ou à compléter.

Développement de la pensée logique

Le programme précédent comportait une rubrique « Classifications et sériations » qui n'est pas reprise dans le programme actuel. Plus largement, aucune rubrique spécifique n'est réservée à ce qui est traditionnellement désigné sous les termes de « développement de la pensée logique ». Une explication est sans doute nécessaire. Elle tient en deux arguments complémentaires. D'une part, la plupart des activités correspondant à cette rubrique concernent tous les domaines de l'école maternelle et pas seulement le domaine « découvrir le monde », qu'il s'agisse de reconnaître des propriétés, de comparer, de classer,

de ranger d'organiser une action et de tirer les conséquences de son effet, d'identifier ou d'appliquer une règle, de coder, de symboliser… D'autre part, et plus fondamentalement, les travaux récents sur ce type de compétences (souvent appelées transversales) montrent qu'elles se développent à partir des activités dans lesquelles elles sont sollicitées et des connaissances que les élèves construisent. Classer ne s'apprend pas de façon générale, mais dans des activités où le classement des formes, des mots, des éléments, des faits… permet d'enrichir les connaissances sur les formes, les mots, les éléments, les faits considérés. Aptitude à classer et maîtrise des connaissances en jeu progressent ainsi simultanément. Chaque domaine du programme est donc concerné par l'utilisation et le développement de ces différentes compétences, dites transversales.
Ce paragraphe a pour but de préciser quelle contribution au développement de la pensée logique des enfants peut être apportée par les activités orientées vers une première approche des connaissances mathématiques.

En petite section

De nombreuses occasions s'offrent à l'enfant de classer les objets qu'il utilise, en fonction de l'utilisation qu'il envisage d'en faire, de leur couleur, du matériau qui les constitue, de leur forme, de leur quantité pour les collections… Il commence ainsi à isoler certaines propriétés des objets et des collections. On se reportera aux rubriques suivantes pour identifier les connaissances relatives à l'espace, aux formes, aux grandeurs, aux quantités, au temps qui commencent ainsi à être élaborées. Les classements effectués sont simples (sous forme de paquets). Ils peuvent être l'occasion de repérer un intrus ou d'identifier un élément absent.
Quelques activités de rangement, notamment pour ce qui concerne les grandeurs (« plus petit que…, plus grand que… ») et les quantités (« plus que…, moins que… ») peuvent être réalisées.
La reconnaissance d'un rythme dans une suite linéaire ou la poursuite d'une telle suite permettent également un travail sur les formes, sur les grandeurs (alternance court/long par exemple) ou sur les petites quantités (alternance un/trois par exemple).
Quelques jeux « à règle » sont proposés, en sachant que les enfants de cet âge sont souvent peu soucieux du respect de la règle et choisissent presque toujours d'orienter leur action dans une autre direction.

En moyenne section

Les activités de comparaison, de classement et de rangement sont largement utilisées dans les différentes rubriques évoquées dans ce document. Elles doivent être finalisées par une question ou une préoccupation suscitant l'intérêt des enfants : s'organiser avant un travail, regrouper des objets en vue d'une nouvelle utilisation, répartir des objets entre des enfants ou des groupes, trouver des intrus ou des absents. Les classements demeurent simples, ceux qui font intervenir deux critères ou plus étant réservés à la grande section.
Lors de ces activités, comme lors des activités spatiales, les enfants sont confrontés à la nécessité de coder un objet, une propriété, un emplacement, un déplacement… pour se souvenir ou pour communiquer. Ces codages plus ou moins figuratifs (proposés ou non par l'enseignant) permettent à l'enfant d'entrer dans le monde de la symbolisation, utilisée en mathématiques comme dans beaucoup d'autres domaines (par exemple, lorsqu'un enfant est repéré par son prénom et son nom).
Le repérage de rythmes plus complexes qu'en petite section, la réalisation de suites respectant ces rythmes, la recherche d'éléments manquants dans de telles suites, la nécessité de respecter les contraintes d'un jeu, tout cela conduit les enfants à prendre conscience de la nécessité de tenir compte de règles, à tenter de les verbaliser et même à commencer à en élaborer.
L'enfant entre également dans l'univers de l'anticipation et de la déduction : essayer de prévoir le résultat d'une action (par exemple, l'orientation d'un objet pour qu'il s'adapte sur un autre objet) ou tenir compte du résultat d'un essai pour réajuster son action (choisir une boîte plus petite que celle qui vient d'être essayée pour réaliser un emboîtement de boîtes gigognes). La pensée inductive doit également être favorisée : c'est par exemple le cas lorsqu'il s'agit de compléter une suite selon un rythme non explicité verbalement, c'est également le cas lorsque l'enseignant amorce un tri, sans rien dire, et demande à un enfant de placer d'autres objets.

En grande section

Les activités de comparaison, de classement et de rangement concernent toutes les rubriques : organisation de l'espace, formes, grandeurs, quantités, organisation du temps. Les problèmes posés se complexifient et peuvent nécessiter le croisement de deux critères : comparaison d'objets selon deux propriétés utilisées simultanément, classement d'objets ou de collections en tenant compte de deux propriétés et pouvant déboucher sur une organisation de type tableau à double entrée…
Les symboles utilisés pour représenter un objet, coder une propriété, désigner un déplacement deviennent plus abstraits : les élèves sont placés en situation de lecture, d'interprétation et de production de tels symboles.
L'enfant est confronté à la reconnaissance et à la production de rythmes répétitifs ou évolutifs : par

exemple, identification du rythme qui a présidé à la création d'une partie d'une suite pour pouvoir la compléter. La pensée inductive de l'élève est alors sollicitée.
La pratique de jeux comme les jeux de portrait, du Mastermind (adapté aux enfants de cet âge), les jeux d'alignement, les *memories*… permettent de développer les capacités à déduire, à élaborer une stratégie et à l'adapter en fonction des réponses obtenues.
Enfin, dans les nombreux problèmes qu'il a à résoudre, l'enfant est conduit à faire des essais et à les réajuster en fonction des résultats obtenus : il développe ainsi sa capacité à traiter une situation par essais et ajustements. C'est par exemple le cas lorsqu'il doit chercher combien il doit demander de bandes de deux gommettes et de bandes de cinq gommettes pour être sûr d'avoir onze gommettes.

Domaines d'activités

Repérage dans l'espace

L'exploration et la structuration de l'espace sont des objectifs fondamentaux de l'école maternelle. Ils conditionnent la construction de compétences utiles au développement de l'enfant, qu'il s'agisse de la construction de ses repères (spatiaux et temporels), du développement de son autonomie ou encore de ses apprentissages dans les différents domaines d'activités.
La construction des compétences liées au repérage dans l'espace se fait en lien avec le développement des aptitudes sensorielles (vue, toucher, odorat, ouïe, goût) et des facultés motrices et intellectuelles. L'expérience spontanée de l'espace, incontestablement nécessaire, ne saurait à elle seule garantir ces apprentissages. Le recours au langage et la verbalisation des actions réalisées ou des relations utilisées sont indispensables au progrès des enfants. Dans ce domaine, tout particulièrement, les activités papier-crayon ne doivent pas se substituer aux expériences effectuées dans l'espace réel.
L'identification et la connaissance des espaces communs de l'école (salle de classe, salle de jeu, couloirs, cour) permettent à l'enfant de s'y repérer. La possibilité d'explorer de « grands espaces » aménagés (école, quartier) doit également être envisagée. Ces espaces constituent les terrains privilégiés de ses expériences spatiales. L'enfant découvre et occupe ces lieux en se situant par rapport aux « objets » (ou aux personnes) et en situant les « objets » (ou les personnes) les uns par rapport aux autres. Par des déplacements contrôlés, effectués selon des règles à respecter, anticipés et exprimés verbalement avant d'être codés, par des actions finalisées (aménagements, transformations), il devient capable d'investir différents espaces : familiers, proches ou lointains.
L'utilisation du langage, la lecture d'images, de photos ou de dessins, leur production à partir de contraintes à respecter, la construction de maquettes (pâte à modeler, Lego…), la production de dessins sont pour l'enfant autant d'aides à la structuration de l'espace. Ce travail est évidemment à conduire en liaison avec les activités langagières, physiques ou plastiques proposées aux enfants.

En petite section

L'enfant explore et agit dans l'espace qui l'entoure. L'enseignant accompagne par le langage ses découvertes et ses progrès. L'aménagement et l'utilisation des coins, les activités dans la salle de jeu, la recherche d'objets cachés ou déplacés conduisent l'enfant à investir différents espaces (la classe, la salle d'évolution, la cour, par exemple).
Les localisations d'abord données oralement par le maître, puis formulées par les enfants eux-mêmes, offrent des occasions de structurer l'espace par rapport à des repères fixes. Elles aident à comprendre et à utiliser des locutions spatiales, en particulier celles fondées sur des oppositions : « proche » et « lointain », « sur » et « sous » (« la marionnette est cachée *sous* la table » ou « est posée *sur* la table »), « dedans » et « dehors », « à côté de » et « loin de », « d'un côté » et « de l'autre côté »…
La structuration de l'espace se construit également lors de parcours suivant des consignes orales directionnelles (« aller vers la porte, monter sur le banc »…) et par le récit qui permet de situer les événements de la vie quotidienne dans l'espace et le temps (« nous sommes dans la salle de classe, avant nous étions dans la salle de jeux et tout à l'heure, nous serons dans la cour »).
La manipulation et la réalisation d'objets ou des jeux d'empilement et d'emboîtement (comme la construction de tours avec du matériel modulaire ou avec des cartons) conduisent les enfants à expérimenter l'équilibre, la gravité et à envisager une première approche de la verticalité et l'horizontalité.
Observer, reconnaître, commenter, décrire des photos et des images représentant des espaces connus permettent d'esquisser de premières représentations de l'espace. Il est par exemple possible de demander à un enfant de se placer dans un endroit de la classe montré sur une photo.

En moyenne section

L'espace de l'enfant s'agrandit. Certains jeux obligent à exprimer un repérage par rapport à une personne (soi-même ou un camarade) ou un objet fixe orienté (« devant moi, derrière Thomas, devant la chaise »), ou à respecter des consignes directionnelles (« en avant, en arrière, en haut, en bas, monter, descendre »). C'est le cas par exemple en motricité lors de jeux collectifs ou de danses.

La confrontation à des problèmes où l'enfant doit communiquer oralement à un autre camarade la position d'un objet caché dans un espace connu l'amène à choisir des repères (orientés ou non) et à utiliser un vocabulaire adéquat pour situer l'objet par rapport aux repères choisis (« près de l'arbre, à côté du banc, sous le tableau, entre les deux fenêtres… ») ou pour décrire un espace de son point de vue propre (« en haut, derrière le poteau, devant le tableau… »). Ce type d'activité oblige à un effort de décentration pour adopter le point de vue d'une autre personne.
Certaines activités visent à initier l'enfant au repérage sur une ligne orientée ; un vocabulaire temporel peut alors être utilisé : « début, fin, avant, après… ».
Des jeux comme le *memory* aident l'enfant à développer progressivement une mémoire spatiale ou à construire des organisations spatiales plus performantes.
Des activités du type « jeux de Kim visuels » contribuent à développer le recours à des organisations spatiales pour contrôler l'invariance d'une collection : par exemple, dans une configuration d'objets, il s'agit de retrouver celui qui a été déplacé par l'enseignant (sans que les enfants soient témoins du déplacement).
Progressivement, l'enfant est amené à reconnaître et à utiliser des représentations d'espaces connus. Par exemple, il peut être invité :
– à réaliser un parcours passant par quatre endroits de la cour indiqués par des photos ;
– à retrouver une cachette indiquée sur une représentation ;
– à communiquer à un camarade un emplacement sur une photo ou sur une autre représentation d'un espace réel.

En grande section

Les activités décrites précédemment se poursuivent et s'enrichissent. Des espaces plus vastes peuvent être explorés. L'enfant améliore la construction de sa latéralité, il repère progressivement sa droite et sa gauche. Il décrit, de son point de vue, des dispositions plus complexes d'objets ou d'assemblages d'objets, par exemple en vue de leur reconnaissance ou de leur reproduction, en repérant les éléments les uns par rapports aux autres (« au-dessus de, devant, à droite de, à gauche de »).
Ces situations où il faut décrire des positions dans un espace sont souvent d'une grande complexité, liée à des conflits entre les différents systèmes de repère en présence, notamment celui centré sur le locuteur et celui centré sur la personne ou l'objet observé. Par exemple, sur une image représentant une poupée de face avec une fleur dans la main, dira-t-on que la fleur est à la droite ou à la gauche de la poupée ? De même, les mots « devant » et « derrière » ont diverses significations, prenant ou non le point de vue du locuteur : « Mets-toi dans la file indienne derrière Yann » ou « Cache-toi derrière le buisson »… Il convient donc d'éviter dans un premier temps toute ambiguïté génératrice de confusion de significations, en choisissant convenablement les espaces et les objets qui sont les supports des situations d'apprentissage. Ainsi, l'enseignant peut poser des questions nécessitant d'orienter l'espace par rapport à une marionnette, à une poupée, à un autre enfant, ce qui amène à comparer son point de vue propre avec celui d'un camarade dans des jeux du type « Jacques a dit ». Plus tard, au cours des cycles suivants, les élèves seront initiés à cette complexité et amenés à la gérer. Mais, dès la grande section, ils sont sensibilisés au fait qu'un même objet ou une même situation peuvent être perçus et décrits de différents points de vue, selon la position des observateurs.
Le « pilotage » d'objets programmables ou d'enfants jouant les robots sur un parcours fixé oblige à une décentration des systèmes de repère sur un « objet » lui aussi orienté et mobile : « Va en avant, tourne à droite… »
Des activités peuvent être proposées dans des espaces plus vastes (cour, école, parc…) comme une course au trésor ou la mise en place d'un parcours. Par exemple, les enfants reçoivent par écrit des indications à propos de positions d'objets ou d'itinéraires. Celles-ci s'appuient sur des schémas (premières représentations) où sont identifiés des repères bien connus (arbres, toboggan…). Puis les élèves peuvent être amenés à communiquer eux-mêmes des positions ou des trajets à leurs camarades. Ces schémas pourront être par la suite confrontés à des représentations plus conventionnelles (photos, maquettes, plans). Toute première représentation doit ainsi être mise (ou construite) en relation avec l'espace vécu, en tenant compte des modifications d'orientation qui peuvent apparaître. Ainsi, les objets, les déplacements, les actions donnent lieu à des activités de codage ou de décodage lorsque la situation le nécessite : situation de communication, mise en mémoire d'un placement ou d'un déplacement en vue de sa reproduction ultérieure…
Certaines activités peuvent se dérouler dans l'espace particulier que constitue un quadrillage dessiné au sol ou sur papier : déplacements (en utilisant différents types de codage), placement d'objets par rapport à des objets déjà positionnés, reproduction de configurations. Ces activités ne doivent cependant pas constituer l'essentiel des expériences spatiales des enfants. Le codage des cases ou des nœuds du quadrillage est un objectif du cycle 2.
L'utilisation de notices de montage contribue aussi à cette lecture et à cette production de représentations conventionnelles d'actions spatiales.
Les activités dans lesquelles il est nécessaire de passer du plan horizontal au plan vertical (celui du tableau, par exemple) font l'objet d'une attention particulière :

– l'enseignant veille à faire contrôler la conservation des positions relatives, par exemple celles des objets situés sur le sol de la classe et celles de leurs représentations sur un plan dessiné au tableau ;
– cet apprentissage est conduit en lien avec l'apprentissage de l'écrit, au cours duquel les élèves ont à repérer des éléments sur le tableau et à les transposer sur la feuille de papier : les expressions comme « en haut, en bas, à droite, à gauche… » prennent alors une autre signification (« en haut du tableau » s'appuie sur la notion usuelle de verticalité, alors que « en haut de la feuille » se rapporte à l'orientation de la feuille dans le plan horizontal par rapport à la personne qui l'utilise).

Les activités de repérage sur une ligne orientée (« avant, après… »), de déplacements en suivant des directions (« monter, descendre… ») ou d'une trajectoire (« de gauche à droite ») sont également utiles à l'apprentissage de l'écrit.

Le vocabulaire spatial permet également de différencier les lignes ouvertes des lignes fermées et de préciser la notion de frontière.

En arrivant au CP, l'ensemble des compétences spatiales nécessaires aux élèves n'ont pas été construites et des différences importantes peuvent être constatées entre les élèves. Un repérage individuel de compétences doit être réalisé et de nouvelles activités d'apprentissage sont à envisager pour les deux années du cycle 2 (se reporter au programme, au document d'application et au document relatif aux apprentissages spatiaux et géométriques pour le cycle 2).

Découverte des formes et des grandeurs

Le jeune enfant est très tôt capable de reconnaître une forme, bien avant de l'analyser, de la nommer, d'en repérer des propriétés ou d'en donner une première définition.

En maternelle, une reconnaissance globale de certaines formes est visée, par la vue et par le toucher (reconnaissance à l'aveugle), dans des activités qui ont du sens pour l'enfant (jeux, rangements…). Dès les petites classes, au cours d'activités quotidiennes, les enfants sont familiarisés avec un vocabulaire qui leur permettra, à terme, de caractériser les propriétés d'objets qu'ils auront à décrire, à reconnaître, à reproduire, à construire (par exemple, lors d'une collecte de feuilles en automne, ils remarquent que des feuilles ont une forme pointue, que d'autres sont arrondies ou que leur contour ressemble à une vague…).

L'exploitation de fiches techniques pour fabriquer un objet (dans des jeux de construction comme les Lego ou les Meccano) permet de confronter les enfants à la reconnaissance de formes et à leur différenciation par leur taille (petit, moyen, grand).

Les activités de classement et de rangement selon des grandeurs diverses sont réalisées dans des situations qui ont du sens pour l'enfant. Il peut s'agir, par exemple :
– de faire ranger des tours de cubes empilées de la plus petite à la plus haute pour réaliser un escalier (domaine des longueurs) ;
– de trier des objets en plaçant les plus lourds sous une étagère et les plus légers sur cette étagère (domaine des masses) ;
– de trier des objets en plaçant les plus gros dans un grand carton et les plus petits dans une boîte (domaine des volumes) ;
– de construire des tours en empilant des disques de plus en plus petits (domaine des aires) ;
– de choisir des formes en vue de recouvrir une surface (dans des jeux tels que le Tangram).

Ces activités doivent être accompagnées de moments d'explicitation, soit par les élèves eux-mêmes, soit par le maître qui commente le résultat de l'action. C'est l'occasion de préciser ou de donner un vocabulaire, au début fondé sur des oppositions (« peu/beaucoup, lourd/léger, mince/gros, plein/vide, court/long »), puis exprimant des comparaisons (« plus lourd que, moins long que… »).

À l'école maternelle, il s'agit de faire appréhender les objets selon le critère d'une grandeur particulière (sa longueur, sa masse ou son volume), de faire comparer deux objets selon un de ces critères, lorsque cela est possible, et d'avoir parfois recours à un troisième objet de référence pour pouvoir faire cette comparaison. Les activités proposées, qu'elles soient libres ou dirigées, doivent permettre à l'enfant de faire des essais et des constats en manipulant toutes sortes de matériaux tels que des morceaux de ficelle, des baguettes, des pièces de puzzle, des cubes, de l'eau, du sable, de la pâte à modeler, etc.

Pour l'exploration des formes et des grandeurs, l'utilisation du langage vient en appui de l'action et la complète. Il est nécessaire que l'enseignant incite l'élève à dire ce qu'il fait : « Que fais-tu avec tes cubes ? Pourquoi as-tu mis cette forme avec celle-là ? » Les mots, nécessaires pour construire du sens, permettent une mise à distance par rapport à l'action elle-même et contribuent progressivement à fixer la connaissance.

En petite section

Dès cette année, les enfants commencent à différencier globalement des formes figuratives et des formes simples par la vue et par le toucher. Dans les jeux d'emboîtement, d'encastrement ou les puzzles, l'élève doit identifier la pièce puis la bonne orientation pour faire coïncider une face avec le trou ou l'empreinte. Il est en effet essentiel que l'enfant observe des formes placées dans des positions variées afin de percevoir l'invariance d'une forme par rapport aux déplacements qu'elle peut subir.

Les jeux de reconnaissance tactile, par exemple ceux où il s'agit de sortir d'un sac exactement le même objet que celui montré ou désigné, contribuent à l'appréhension des formes et permettent au maître de « dire » le vocabulaire.
Les jeux de Kim (retrouver un objet enlevé ou déplacé dans un lot d'objets) incitent à construire des images spatiales pour mémoriser.
Des classements de lots de formes variées, toutes de même couleur et épaisseur, des jeux de dominos des formes (conduisant à associer des formes superposables) renforcent ces premières connaissances.
Ces activités sont aussi l'occasion pour le maître d'utiliser du vocabulaire et de vérifier sa compréhension : « rond, arrondi, pointu, plat, droit… ».
Dans le domaine des grandeurs, des comparaisons directes de longueurs (en mettant côte à côte les objets) peuvent être amorcées. L'élève peut d'abord comparer deux objets, puis ranger trois objets selon leur longueur (par exemple, baguettes de bois ou crayons, bandes « toises » après une séance de mesurage). Il utilise les termes « grand » et « petit ».
D'autres activités peuvent être proposées ou exploitées dans les moments de classe où une certaine liberté d'action est permise. Dans les « espaces » eau ou sable, en particulier, la manipulation amène souvent les enfants à soupeser, comparer, transvaser.
Ces activités qui nécessitent une observation peuvent être l'occasion d'un moment de langage où le maître questionne l'enfant sur ce qu'il a découvert, ce qu'il a voulu faire, l'aide à exprimer la réussite de son expérience voire les raisons de ses échecs : « Pourquoi ça n'a pas marché ? De quoi aurais-tu eu besoin ? » Lors des moments collectifs de langage, il aide l'enfant à faire part de son expérience à ses camarades et sollicite de ceux-ci qu'ils apportent leur contribution à cette relation, par exemple en relatant leurs propres essais.

En moyenne section

Le travail sur les formes se poursuit à l'aide d'activités identiques à celles mises en œuvre en petite section, mais le nombre de formes différentes augmente et elles sont plus souvent présentées dans différentes positions. Les formes géométriques simples que les enfants savent désigner sont plus nombreuses : carrés, triangles divers (pas seulement équilatéraux), ronds, rectangles. Pour aider à la perception des formes et à leur description, les enfants peuvent être invités à reconnaître la pièce qui ne va pas dans une collection de formes proposées (par exemple, un triangle dans un ensemble de carrés et de rectangles, un carré dans un ensemble de triangles pas tous équilatéraux). Il est en effet souvent plus facile de dire pourquoi « ce n'est pas pareil » que de dire ce qui est commun à un ensemble d'objets regroupés : une ressemblance entre les objets, c'est-à-dire le repérage d'une propriété commune à ces objets, est inférée de la différence avec d'autres objets, qui ne possèdent pas cette propriété.
De nombreuses activités, de décoration par exemple, peuvent être proposées pour travailler des algorithmes où les enfants utilisent des gommettes de formes géométriques simples. Des jeux associant formes et grandeurs sont également proposés.
Certaines activités conduisent à associer un objet à une de ses représentations (photo, dessin) et les enfants sont invités à représenter eux-mêmes certaines formes, par exemple en vue de les faire identifier par d'autres enfants.
Dans le domaine des longueurs, l'enfant range au moins quatre objets selon leur longueur (horizontalement ou verticalement : on parle alors de hauteur).
Le vocabulaire s'enrichit (« long/court ») et les comparaisons sont décrites à l'aide de « plus long que » et « moins long que ».
Les enfants commencent à appréhender une nouvelle grandeur : la masse. Ils soupèsent des objets, un dans chaque main, pour en comparer la masse et utilisent le vocabulaire « lourd » et « léger ». Ils utilisent également la balance à plateaux (qui se trouve souvent dans l'« espace cuisine »). Ils observent que celle-ci indique quel objet est le plus lourd. Des activités sont conçues dans le but d'amener les enfants à prendre conscience du fait qu'il n'existe pas toujours de relation entre « gros/petit » et « lourd/léger ».

En grande section

Des formes simples telles que le carré, le rectangle, les triangles (pas seulement équilatéraux), le rond, l'ovale sont reconnues et nommées. De plus, sans que cela constitue une compétence à acquérir, les enfants peuvent différencier des formes en énonçant, dans leur langage, certaines de leurs propriétés mathématiques (« bord droit, bord courbe… »). Les sommets ou « coins » des figures sont perçus et touchés du doigt, les côtés ou « bords » sont suivis avec le doigt. Ces figures sont reconnues dans des assemblages complexes, par exemple dans une composition artistique. Elles sont également identifiées et utilisées pour réaliser des solides qui peuvent être construits avec différents matériaux (pâte à modeler, pailles, figures planes emboîtables…).
Comme en moyenne section, des activités conduisant à associer un objet à certaines de ses représentations (photo, dessin) sont proposées. Les enfants deviennent davantage capables de représenter eux-mêmes certaines formes, en particulier dans des jeux de communication.
Les activités concernant les grandeurs entreprises en moyenne section sont poursuivies et enrichies sur le plan langagier. Des expressions telles que « plus… que », « moins… que », « aussi… que » sont utilisées pour exprimer le résultat de comparaisons selon différentes grandeurs.

Les activités à caractère individuel se poursuivent. Des activités collectives ou effectuées en petits groupes peuvent également être mises en place, par exemple en installant pendant une période déterminée un « espace » aménagé en vue d'un travail sur une grandeur particulière. Cette organisation favorise les interactions, la répartition des tâches, des mises en commun.
L'enfant range plus de quatre objets selon leur longueur et on peut envisager de faire réaliser des comparaisons indirectes de longueurs en ayant recours à un étalon (par exemple, une tige ou une bande de carton), dans une activité qui a du sens pour l'enfant. Pour cela, il faut que les longueurs à comparer ne puissent pas être mises côte à côte. Il peut construire des objets de même longueur qu'un objet donné.
Dans le domaine des contenances, la pratique d'activités avec des liquides offre aux enfants la possibilité d'effectuer des comparaisons par transvasement direct (par exemple, vider le contenu d'une bouteille dans un saladier et constater que l'on peut mettre plus d'eau ou de sable dans le saladier que dans la bouteille). Si la comparaison indirecte est difficile et sera un objet d'investigation dans les cycles suivants, cela ne doit nullement empêcher d'enrichir l'expérience des enfants. Il est possible, par exemple, de vider les contenus de différentes bouteilles dans des verres et de constater que l'on a pu remplir huit verres avec une bouteille et seulement six avec une autre et, inversement, de demander combien de verres on peut mettre dans une bouteille. Les élèves sont ainsi sensibilisés à la nécessité d'utiliser pour certains travaux un étalon. Toujours dans ce domaine, la réalisation de recettes de cuisine (activité couramment pratiquée dans les classes) permet de mesurer des contenances avec des unités telles que le pot de yaourt, la cuillerée, le verre, etc.
Pour les masses, la balance sert à savoir qu'un objet est plus lourd qu'un autre mais aussi à faire réaliser des équilibres et donc à réaliser un « objet » aussi lourd qu'un autre, par exemple mettre un objet sur un plateau et verser sur l'autre plateau du sable (ou y placer des billes ou de la pâte à modeler) jusqu'à obtenir l'équilibre.

Approche des quantités et des nombres

Les études récentes en sciences cognitives soulignent que dès son plus jeune âge, l'enfant manifeste des compétences relatives aux quantités et à leur expression par des nombres (exprimés oralement). Elles mettent également en évidence que, dans la conquête de l'outil numérique, l'acquisition de la chaîne numérique verbale (la suite orale des nombres) et son usage dans les processus de quantification jouent un rôle déterminant. Pour l'essentiel, la chaîne numérique orale comme les diverses procédures de quantification (reconnaissance immédiate de très petites quantités, comptage un par un, estimation) s'acquièrent entre deux et six ans, c'est-à-dire pendant la période de scolarité maternelle qui joue donc un rôle décisif.
Les compétences indiquées dans le programme sont des compétences de fin d'école maternelle. Certaines d'entre elles sont construites beaucoup plus tôt. Les commentaires qui suivent fournissent des indications pour aider les enseignants à repérer les apprentissages possibles à différents moments de l'école maternelle. En effet, ceux-ci se construisent dans la durée et chaque enfant développe ses compétences à son propre rythme. Dans le domaine numérique tout particulièrement, l'enseignant doit être attentif aux progrès et aux difficultés de chacun, car les connaissances des enfants évoluent selon des rythmes très différenciés.

En petite section

Par les activités et les jeux qu'il fréquente, au travers de ses premières interrogations ou de celles de l'enseignant, l'enfant commence à élaborer l'idée de quantité. Celle-ci se traduit d'abord par des oppositions entre « pareil » et « pas pareil » ou entre « beaucoup » et « pas beaucoup ». Progressivement, l'apparence des collections devient moins prégnante, notamment lors d'activités dans lesquelles il faut opérer une distribution, apparier des objets, comparer des quantités (« un peu, beaucoup »). Ces activités nécessitent le recours à des compétences utiles dans la pratique du dénombrement (en particulier la correspondance terme à terme). Les enfants sont confrontés à des situations dans lesquelles il faut prendre autant d'objets qu'il y a de doigts montrés ou de points sur un gros dé (les quantités étant limitées en fonction des compétences de chacun, à trois par exemple) ou dans lesquelles il faut dire le nombre associé à une petite quantité… La verbalisation « miroir » par l'enseignant des actions menées par l'enfant contribue à la prise de conscience des effets de ses actes et à la mémorisation des mots-nombres. Les procédures utilisées sont à ce moment très variées, selon les élèves et en fonction de la taille des objets : correspondance effective ou par pointage, reconnaissance globale…
Les premiers éléments de la comptine numérique orale peuvent déjà être mis en place, au moins jusqu'à cinq ou six, pour une grande majorité d'élèves, par imitation avec l'aide de l'adulte. Son utilisation pour dénombrer de petites quantités (supérieures à trois) commence à se développer. Pour cela, l'utilisation des doigts, pour pointer les objets comptés comme pour afficher des quantités, joue un rôle important. Une première fréquentation de comptines et de livres à compter peut être envisagée pour aider à cette mémorisation indispensable de la suite orale

des nombres, même si elle ne garantit nullement que les enfants soient capables d'utiliser la comptine qu'ils connaissent pour dénombrer. L'utilisation autonome des nombres ne relève pas essentiellement d'activités rituelles (récitation de la suite des nombres, comptage des absents…), mais d'actions qui ont du sens pour l'enfant et qui lui font prendre conscience que dénombrer est efficace pour retenir une quantité. Le dénombrement de petites quantités est déjà possible, les procédures pouvant varier d'un enfant à l'autre : reconnaissance perceptive ou comptage un par un. Dans ce dernier cas, tous les enfants ne sont pas encore capables de reconnaître que le dernier mot prononcé lors du comptage des objets exprime la quantité toute entière.
À quatre ans, la plupart des enfants n'ont pas encore pris conscience des règles de fonctionnement de la chaîne orale et de ses particularités linguistiques. L'apprentissage reste essentiellement centré sur l'oral, ce qui n'interdit pas l'utilisation des écritures chiffrées par l'enseignant, mais ni leur écriture par les élèves, ni leur reconnaissance ne sont des objectifs à ce moment de l'école maternelle.

En moyenne section

Une nouvelle étape peut être franchie. Ainsi, pour comparer deux collections (éventuellement éloignées l'une de l'autre) ou pour réaliser une collection qui a autant d'objets qu'une collection éloignée, l'enfant peut utiliser des procédures variées : estimation (pour des quantités nettement différentes), « image mentale » globale pour de très petites collections, recours à une collection intermédiaire (doigts, dessin), partition de la collection en sous-collections facilement dénombrables, expression de la quantité par un « mot-nombre »… Le vocabulaire « plus que, moins que, autant que » se met en place. Le dé à points ordinaire (à six points) peut être utilisé dans des jeux nécessitant de constituer des collections ou de se déplacer sur une piste. Les représentations des nombres avec les doigts sont valorisées (affichage direct d'un nombre ou affichage par dénombrement un à un). D'autres illustrations des nombres par des quantités sont utilisées, en ne se limitant pas aux constellations usuelles.
À cet âge, la comptine orale des nombres peut être étendue de façon importante, pour une grande majorité d'enfants, au moins jusqu'à 12 ou 15 (éventuellement de façon accompagnée pour des nombres dont le nom est difficile à mémoriser, notamment pour les nombres entre 11 et 16). Les comptines et les livres à compter (utilisation et fabrication) jouent leur rôle dans cette mémorisation.
L'usage de la suite orale des nombres pour le dénombrement de collections (en particulier de plus de trois ou quatre éléments) se met en place progressivement, dans des situations où celui-ci est nécessaire. Le plus souvent, il s'agit d'activités dans lesquelles le déplacement des objets est possible pour être sûr de ne pas en oublier et de ne pas compter certains d'entre eux plusieurs fois. Dans d'autres cas, les enfants peuvent commencer à organiser les objets ou être placés face à l'obligation de les marquer au fur et à mesure du dénombrement.
Parallèlement, les enfants sont confrontés à la suite écrite des nombres, notamment à travers un premier usage du calendrier, les calendriers de type éphéméride ou linéaire étant préférés à ceux organisés sous forme de tableau.
La fréquentation des nombres dans des activités occasionnelles liées à la vie de la classe ou dans des jeux est nécessaire, mais ne suffit pas à la construction des compétences numériques visées. Des occasions doivent être ménagées où les enfants ont un problème à résoudre, c'est-à-dire sont confrontés à une question qu'ils identifient et dont ils cherchent à élaborer une réponse, puis se demandent si la réponse obtenue convient : distribution un par un ou deux par deux, réalisation d'une collection de quantité identique à celle d'une collection donnée, comparaison de collections, partage équitable ou non d'une collection, évolution d'une collection par ajout ou retrait d'un ou deux objets… Dans toutes ces activités, la taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets (par exemple de pouvoir les déplacer), le fait d'avoir à anticiper la réponse à cause de l'éloignement ou de la dissimulation des objets… sont des variables importantes que l'enseignant peut modifier pour amener les enfants à faire évoluer leurs procédures de résolution. La verbalisation par l'enfant de ses actions et de leurs résultats constitue une aide importante à la prise de conscience des procédures utilisées et de leurs effets. Ces activités peuvent également être l'occasion d'utiliser des écritures provisoires (dessin, schéma…) nécessaires, par exemple, pour transmettre une information ; plus tard, les écritures chiffrées se substitueront à ces premières représentations écrites des quantités.

En grande section

Il s'agit de consolider des compétences utiles au travail plus organisé qui sera conduit au CP, toujours à travers des activités où l'utilisation des nombres constitue un moyen approprié pour résoudre un problème. Le nombre devient un outil de contrôle des quantités : pour en garder la mémoire, pour s'assurer qu'une distribution ou qu'un partage est équitable, pour décider qui en a le plus, pour rapporter juste ce qu'il faut, pour construire une collection qui a autant d'objets qu'une collection de référence…
Cet usage des nombres nécessite de connaître la comptine orale suffisamment loin : 30 parait être un objectif raisonnable, en sachant que certains enfants sont capables d'aller bien au-delà. Vers six ans, à

travers les activités qui leur sont proposées, la plupart des enfants sont capables non seulement de mémoriser la suite orale, mais d'en acquérir une maîtrise qui la rend opératoire pour résoudre des problèmes : comptage en avant et en arrière, comptage à partir d'un autre nombre que un, récitation de la suite d'un nombre donné jusqu'à un autre nombre fixé à l'avance…

Le nombre devient ainsi un outil utilisable pour effectuer un dénombrement (dans le domaine numérique maîtrisé), repérer des positions, mémoriser le rang d'une personne ou d'un objet dans un alignement et résoudre des problèmes portant sur les quantités ou sur les positions sur une bande numérotée (voir plus loin). L'entraînement au dénombrement de collections n'est, pour l'essentiel, pas fait pour lui-même, mais à l'occasion d'activités diverses. L'enseignant veille à faire dénombrer des collections mobiles (faciles à déplacer, pour séparer les objets « déjà comptés » de ceux qui restent à compter), puis des collections fixes (nécessitant un marquage réel ou mental) et des collections représentées.

Les jeux qui ont pour support la suite écrite des nombres sur une piste (type jeu de l'oie) permettent une première mise en relation des mots-nombres avec leur « image chiffrée » sans que des connaissances soient déjà attendues à ce sujet pour tous les élèves. En complément, l'élaboration progressive d'une bande numérique par l'enfant, avec l'aide de l'adulte, lui permet de contrôler l'avancée de sa connaissance de la comptine orale, de retrouver l'écriture chiffrée d'un nombre « dit » et de l'écrire en respectant le sens des tracés, de dire un nombre donné par son écriture chiffrée.

Enfin, un premier pas est possible en direction de ce qui deviendra le calcul au cycle 2. Il ne s'agit ni d'utiliser prématurément le symbolisme (+, –, =), ni d'apprendre à calculer au sens où on l'entend habituellement (en effectuant des opérations), ni de mémoriser des résultats. Le travail est uniquement centré sur la résolution de problèmes sans qu'il soit fait appel au calcul sur les nombres. Dans les problèmes proposés, les enfants sont placés en situation d'anticiper des résultats (sans possibilité d'action directe sur les objets), par exemple pour trouver :

– le nombre d'objets que contiendra une collection après une augmentation ou une diminution ou le nombre d'objets qu'il faut ajouter ou enlever à une collection pour obtenir la quantité désirée ou encore le nombre d'objets que contenait une collection avant qu'elle n'augmente ou qu'elle ne diminue ;

– la position qui sera atteinte après un déplacement sur une piste graduée ou l'amplitude du déplacement nécessaire pour passer d'une position à une autre ou encore la position occupée avant que ne soit réalisé le déplacement ;

– le résultat d'un partage équitable.

Ils peuvent également avoir à désigner une quantité importante en utilisant des nombres connus (il y en a cinq et encore trois…).

Pour répondre à de telles questions, sans recourir aux opérations classiques, les enfants peuvent utiliser leurs connaissances sur les nombres : dessiner et dénombrer, utiliser le comptage en avant ou en arrière à partir d'un nombre donné… L'apprentissage essentiel consiste à comprendre que ces problèmes peuvent être résolus grâce aux nombres. Il se prolongera par la mise en place du calcul à l'école élémentaire.

Pour l'ensemble des activités évoquées ici, le travail sur des situations réelles (à partir de jeux, de situations élaborées par l'enseignant, de situations tirées des activités de la classe) est essentiel et préférable aux activités sur fiches.

Lorsqu'il arrive au CP, l'élève a donc une première connaissance des nombres et dispose déjà de nombreuses compétences. Il n'est pas opportun de commencer l'année par une étude des nombres un par un. Un travail plus global est préférable, dans la mesure où il permet de mettre en évidence et de valoriser les connaissances déjà disponibles et qui doivent faire l'objet d'un repérage pour chaque enfant.

Le temps qui passe

À l'école maternelle, les élèves s'approprient les repères chronologiques qui conditionnent la construction de la notion de temps, dans ses différentes dimensions : temps court (activité avec son « avant » et son « après », journée) et temps long (succession des jours dans la semaine et le mois, rythme des saisons). L'appréhension du temps très long (temps historique) est plus difficile pour les jeunes enfants, notamment pour ce qui concerne la distinction entre passé proche et passé lointain.

L'idée de simultanéité est mise en évidence à l'occasion de certaines activités : partir au moment où un autre enfant franchit une ligne déterminée, dire ce qu'on a fait pendant la sieste des petits, arrêter une action au même moment…

En même temps que se construisent l'aspect chronologique du temps et l'aspect cyclique de certains phénomènes (saisons) ou de certaines représentations du temps (semaine, mois…), la notion de durée se met en place. L'objectivation de la durée est difficile. Elle est aidée par l'évocation de repères partagés (durée de la récréation, récitation d'une partie de la suite des nombres…), puis par le recours à des instruments (sablier, horloge, montre…).

En petite section

L'enfant élabore les premiers éléments de l'idée de chronologie. Le vocabulaire « avant, après, maintenant » est utilisé dans le cadre d'une activité ou pour relier deux activités : « avant le goûter, après le goûter »… Lorsque des journées sont rythmées à l'identique, certains événements peuvent être anticipés ou, au contraire, remémorés (par exemple en organisant une suite de photos ou d'images évoquant des événements réellement vécus par les élèves). Le « matin » est distingué de l'« après-midi » et les termes « hier, aujourd'hui, demain » sont progressivement utilisés. Une éphéméride est installé dans la classe et permet un début de prise de conscience de la succession des jours.

En moyenne section

La notion de chronologie se consolide, d'abord à partir des événements familiers de la vie de la classe ou de la vie sociale de l'enfant : succession dans la journée, d'un jour à l'autre, pendant la semaine. Le codage des événements et le langage utilisé permettent d'évoquer, de reconstituer ou de prévoir de telles successions. Le calendrier (sous diverses formes, de préférence linéaires) permet de fixer la succession des jours de la semaine, de les nommer, de s'intéresser à leur numérotation et d'aider à la prise de conscience du caractère répétitif des noms des jours. Il permet une sensibilisation au caractère irréversible du temps qui passe : « Le jeudi 27 novembre 2003 est passé, il ne reviendra pas… même si le jeudi, le mois de novembre et d'autres 27 novembre sont appelés à revenir… »
On peut, par exemple, afficher la date au tableau (jeudi 27 novembre 2003), en cherchant, chaque jour, à ne modifier que les éléments nécessaires (en gras ici pour le jour suivant : vendredi 28 novembre 2003).
L'utilisation d'étiquettes permet aux élèves de devenir progressivement autonomes dans cette activité.
Ils sont sensibilisés à la simultanéité lors d'activités fonctionnelles : démarrer un chant au même moment, chanter en chœur, s'arrêter au même moment…
La notion de durée commence à se mettre en place, d'abord de manière subjective, puis en recourant à des outils qui en fournissent une appréciation plus objective (par exemple un sablier pour contrôler la durée d'une activité). Le calendrier permet une première familiarisation avec différentes durées : jour, semaine, mois et année.

En grande section

Les activités relatives à la chronologie évoquées pour la moyenne section sont reprises et enrichies, par exemple en exploitant des événements marquants de la vie de la classe ou des élèves : visite au musée, venue d'un conteur, anniversaire… Le vocabulaire « avant, après, maintenant » est enrichi de nouveaux termes : « en même temps que, plus tôt, plus tard, hier, aujourd'hui, demain, dans deux jours, avant-hier, après-demain, la semaine prochaine… ». Les événements sont situés dans la journée (certains peuvent être repérés sur l'horloge présente dans la classe), dans la semaine, dans le mois, dans l'année : les divers types de calendriers constituent pour cela des instruments précieux.
Quelques éléments relatifs à la vie des parents et des grands-parents ou en relation avec des objets (monuments…) permettent une toute première familiarisation avec le temps historique.
L'idée de simultanéité continue à être travaillée dans des activités fonctionnelles : simultanéité des instants (démarrer au même moment…), simultanéité sur la durée (certains font la sieste pendant que d'autres préparent un gâteau pour le goûter…).
La notion de durée s'affirme. Des outils divers (comptage régulier, sablier, horloge…) sont utilisés pour comparer des durées. Le jour, la semaine et le mois commencent à être utilisés en tant que durées, mais les relations qui les lient ne seront établies que plus tard.

Repérage des compétences numériques

Cette liste de compétences est inspirée de celle proposée par l'équipe de recherche en didactique des mathématiques de l'INRP (équipe Ermel). Publiée dans Apprentissages numériques et résolution de problèmes – CP *(Hatier, 2000), elle est adaptable aux différents niveaux de l'école maternelle, notamment à la grande section.*

La comptine numérique

Pour chaque enfant, il faut observer et noter les caractéristiques de la suite des noms de nombres qu'il est capable de réciter :
– Jusqu'où la suite est-elle conventionnelle (c'est-à-dire correspond à l'ordre naturel des nombres sans ajout ni omission) ?
– Jusqu'où la suite est-elle stable (c'est-à-dire sans changement d'une récitation à l'autre) ? Après une première récitation, le maître demande : « Peux-tu recommencer depuis le début pour que je puisse écrire tout ce que tu dis ? »
– Quelles sont les erreurs qui apparaissent, telles que les omissions systématiques, ou les erreurs récurrentes (« vingt-neuf, vingt-dix, vingt-onze… ») ?
– Quel est, le cas échéant, l'effet de relance concernant les noms de dizaines ? (Suffit-il de dire « 30 » à l'enfant qui s'arrête à 29 pour qu'il continue ?)
Progressivement, chaque enfant doit savoir et pouvoir dire où il en est dans sa connaissance de la comptine numérique.
– La suite peut-elle être récitée jusqu'à un nombre fixé à l'avance (avec arrêt sur ce nombre) ?

– La suite peut-elle être récitée à partir d'un autre nombre que un ?
– La suite peut-elle être récitée « en arrière » ?

La maîtrise du dénombrement

En demandant « Combien y a-t-il d'objets ? » dans une collection dont le cardinal est adapté au niveau de connaissance de la comptine, on peut observer si l'enfant a recours à un dénombrement, à une estimation globale ou s'il réagit autrement. Dans le cas d'un dénombrement, on peut observer la maîtrise ou non :
– de la synchronisation entre les gestes (prendre les objets, les déplacer, les pointer…) et la récitation de la comptine ;
– de l'organisation du dénombrement (les objets déjà comptés sont-ils bien séparés de ceux restant à compter ?) ;
– du principe cardinal (à la question « Combien y en a-t-il ? », l'enfant répond-il par le dernier nom de nombre énoncé ?).
Ce repérage des aptitudes au dénombrement peut être effectué en entretien individuel ou à l'occasion d'activités dans la classe (compter les présents, les crayons…).

La constitution d'une collection de cardinal donné

En demandant à un enfant de « donner *n* objets » pris dans une collection plus grande (le nombre *n* étant choisi à l'intérieur du domaine numérique où le dénombrement est maîtrisé, domaine qui a été repéré auparavant), on peut observer si l'enfant :
– s'arrête au terme du dénombrement des *n* objets en déclarant qu'il a terminé ;
– dénombre tous les objets de la collection jusqu'à épuisement des objets (ou de ses compétences !) ;
– s'aperçoit qu'il a oublié ce qui lui avait été demandé ;
– donne un tas sans dénombrer…
Ces observations peuvent être faites, par exemple, à l'occasion de distributions de matériel.

Le recours spontané au dénombrement

Il s'agit d'observer comment l'enfant procède pour construire une collection équipotente à une collection donnée sans que celle-ci soit toujours disponible.
Cette observation est réalisée en adaptant la taille des collections à la comptine de chacun. Il est préférable que cette observation soit faite en dehors d'autres observations sur les nombres afin d'éviter un possible conditionnement et de pouvoir s'assurer d'un recours spontané au dénombrement.
Il est indispensable que la consigne n'induise pas le moyen à utiliser. La question « Combien y en a-t-il ? » ou toute allusion au nombre ou au dénombrement sont à éviter.
On peut par exemple demander à un enfant d'aller chercher juste ce qu'il faut de jetons (il faut qu'il y en ait « juste assez, ni plus, ni moins ») pour en placer sur chaque case vide d'un quadrillage.

Le successeur d'un nombre

En ajoutant un élément à une collection que l'enfant a déjà dénombrée et en lui demandant combien il y a d'objets, on peut repérer si l'enfant énonce directement le successeur du nombre précédemment trouvé ou s'il a besoin de recompter le tout.

La lecture des nombres

On présente des cartes avec les nombres de 0 à 20 (non rangés dans l'ordre) et on demande à l'élève de dire quels sont ceux qu'il connaît et de prendre la carte correspondante. On peut observer :
– les nombres qu'il sait lire dans ce domaine numérique ;
– les essais de recherche des cartes dans l'ordre (en s'appuyant éventuellement sur la récitation de la comptine) ;
– les graphies qu'il confond ;
– la façon dont il énonce les nombres à deux chiffres (pour 13 : « un-trois », « trois-un » ou même « vingt-trois »…).
Des occasions se présentent aussi dans la journée qui permettent d'interroger un enfant : calendriers, affichages numériques, nombres écrits sur un emballage, sur un livre…

Problèmes « arithmétiques »

Après avoir fait ajouter ou soustraire par l'enfant une petite quantité d'objets (de un à quatre) à une collection qu'il vient de dénombrer et sans qu'il puisse voir la collection obtenue, on lui demande de dire combien il y en a alors. On peut observer si l'enfant :
– énonce simplement l'un des deux nombres ;
– donne une réponse de la forme « cinq et deux » ;
– est obligé de recompter le tout (en s'aidant de ses doigts par exemple) ;
– surcompte ou décompte à partir du nombre initial d'objets, mentalement, en s'aidant de ses doigts ;
– énonce directement le résultat.

Le calcul mental à l'école élémentaire

Ce texte a pour objet de préciser la place et le rôle du calcul mental dans l'apprentissage du calcul à l'école élémentaire et de fournir des indications relatives à son enseignement pour les cycles 2 et 3.
Pour les apprentissages relatifs au calcul mental à développer aux cours des différents cycles, on peut se reporter aux parties suivantes du texte des programmes et du document d'application.
Les considérations générales relatives aux enjeux de l'enseignement du calcul à l'école primaire sont explicitées dans l'introduction du document d'application (« La question du calcul aujourd'hui »). La place respective des différents moyens de calcul y est précisée : calcul mental, calcul instrumenté et calcul écrit. Rappelons simplement ici cet extrait de l'introduction des deux documents d'application dans lequel est précisée l'importance à accorder au calcul mental : « Automatisé ou réfléchi, le calcul mental doit occuper la place principale à l'école élémentaire et faire l'objet d'une pratique régulière, dès le cycle 2. Une bonne maîtrise de celui-ci est indispensable pour les besoins de la vie quotidienne (que ce soit pour obtenir un résultat exact ou pour évaluer un ordre de grandeur). Elle est nécessaire également à une bonne compréhension de certaines notions mathématiques (traitements relatifs à la proportionnalité, compréhension du calcul sur les nombres relatifs ou sur les fractions au collège…). Et surtout, une pratique régulière du calcul mental réfléchi permet de familiariser les élèves avec les nombres et d'approcher (en situation) certaines propriétés des opérations (voir les différentes méthodes utilisables pour calculer 37 + 18 ou 25 × 16). Dans ce domaine particulièrement, il convient de distinguer ce qu'il faut mémoriser ou automatiser (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure…) et ce qu'il faut être capable de reconstruire (et qui relève du calcul réfléchi : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu). L'exploitation des diverses procédures mises en œuvre par les élèves pour un même calcul permet de mettre l'accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des opérations utilisées “en acte” (certains parlent d'ailleurs à ce sujet de “calcul raisonné”). »
La recommandation des nouveaux programmes selon laquelle « les compétences en calcul mental […] sont à développer en priorité, notamment à travers le calcul réfléchi. […] Au cycle 2, le calcul réfléchi occupe la place principale » n'est pas nouvelle, même si elle a pu paraître méconnue depuis deux ou trois décennies. Elle a été constamment réaffirmée par les programmes dès le début du XXe siècle : « Les exercices de calcul mental figureront à l'emploi du temps et ne devront pas être sacrifiés à des occupations considérées comme plus importantes : aussi bien les avantages du calcul mental ne se bornent pas aux services qu'il rend chaque jour à celui qui s'est familiarisé avec sa pratique ; il constitue une excellente gymnastique pour l'assouplissement et l'adresse de l'esprit aux prises avec les questions mathématiques » (1909). Elle est également reprise dans les textes publiés à l'époque dite « des mathématiques modernes » : « Il est essentiel, et cela à tous les niveaux, que les élèves calculent mentalement et par écrit avec aisance et sûreté […]. La valeur éducative des exercices de calcul mental réside tout autant dans la manière de conduire le calcul que dans sa rapidité » (commentaires des programmes de 1970).

	Programme : objectifs et contenus	**Programme : compétences**	**Document d'application**
Cycle des apprentissages fondamentaux	Exploitation de données numériques (§ 1). Calcul (§ 3).	Calcul automatisé (§ 3.1). Calcul réfléchi (§ 3.2).	Introduction : la question du calcul aujourd'hui (p. 6). Exploitation de données numériques (p. 15-17). Calcul (p. 21-23).
Cycle des approfondissements	Introduction du programme de mathématiques du cycle 3. Calcul (§ 4).	Résultats mémorisés, procédures automatisées (§ 4.1). Calcul réfléchi (§ 4.2).	Introduction : la question du calcul aujourd'hui (p. 6). Exploitation de données numériques (p. 15-17). Calcul (p. 25-28).

Calcul mental, calcul pensé, calcul réfléchi

Les termes, d'une époque à une autre, ont quelque peu varié. En première approximation, on peut être tenté d'opposer le calcul « mental » au calcul « écrit ou instrumenté ». Mais parler de calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écriture. Ce qu'on désigne sous le terme de calcul écrit (« l'opération posée ») requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues, donc du calcul mental. Il ne dispense donc pas de calculer mentalement, bien au contraire ; la technique écrite française traditionnelle de la division, avec ou sans les soustractions intermédiaires, requiert de nombreux traitements mentaux. Le déficit de maîtrise du calcul mental fragilise gravement l'apprentissage des techniques écrites.

Par ailleurs, l'expérience atteste, depuis des dizaines d'années, que les enfants ont souvent tendance à calculer mentalement en appliquant les algorithmes écrits. Ceci est très probablement dû à un établissement insuffisant du calcul mental préalablement à l'apprentissage des techniques écrites qui sont souvent abordées trop tôt et, par la suite, à une prise de conscience insuffisante des différences de traitement entre calcul écrit et calcul mental. Calculer mentalement 127 + 16 en référence à la technique écrite est plus coûteux en terme de charge mentale de travail que d'ajouter successivement 10 et 6. Il importe clairement que les techniques écrites s'appuient sur une pratique du calcul mental déjà bien installée.

Le propre du « calcul automatisé », qu'il s'agisse de l'emploi d'une calculette ou d'un algorithme appliqué avec papier et crayon, est de délaisser l'intuition des nombres, l'ordre de grandeur ; il met en œuvre un algorithme uniforme sur des chiffres et c'est précisément le nœud de son efficacité. Le calcul mental nécessite, au contraire, une intuition des nombres (qui s'affine avec l'entraînement) ainsi qu'une part d'initiative et de choix. Il opère sur des nombres et permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés (commutativité, associativité, distributivité).

L'expression de « calcul mental » signifie qu'entre l'énoncé du problème et l'énoncé du résultat, on renonce à utiliser toute opération posée (technique opératoire usuelle). Cela n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat, voire dans le cours du calcul. Les expressions « calcul réfléchi » et « calcul raisonné », considérées comme équivalentes, sont clairement préférables à celle de « calcul rapide » autrefois en usage. Elles insistent sur l'importance donnée à la méthode (choix d'une stratégie, élaboration d'une procédure) plutôt qu'à la rapidité d'exécution, au moins en ce qui concerne les calculs complexes.

Les différentes fonctions du calcul mental

Au-delà de vertus traditionnellement évoquées (« gymnastique intellectuelle », « adresse de l'esprit » et même « formation du caractère » ou plus précisément « développement de l'attention et de la mémoire »), la pratique du calcul mental a une double fonction, sociale et pédagogique.

Fonction sociale

Il est d'abord un calcul d'usage. Il s'agit de mettre en place des moyens efficaces de calculer, utiles dans la vie courante en l'absence de supports ou d'instruments. Même si l'usage de la calculette est de plus en plus répandu, il demeure nécessaire de savoir calculer sans elle ou, à tout le moins, de pouvoir effectuer un calcul approché. C'est là d'ailleurs un moyen efficace de contrôle, une erreur de manipulation étant toujours possible. Enfin, comme cela a déjà été souligné, sans disponibilité rapide des résultats des tables, il n'y a pas d'accès possible aux techniques opératoires : n'oublions pas que, dans le cas de la multiplication, à l'entrée en sixième les erreurs de table sont plus fréquentes que celles dues à une mauvaise maîtrise de l'algorithme de calcul. Dans cette perspective, trois types d'objectifs peuvent être distingués :

– l'automatisation des calculs simples, orientée vers la production de résultats immédiatement disponibles : récupération en mémoire ou reconstruction instantanée, procédures automatisées ;
– la diversification des stratégies de calcul complexe : calcul réfléchi ou raisonné ;
– une première maîtrise du calcul approché, souvent utilisé dans la vie courante et dont l'apprentissage doit se poursuivre au collège.

Fonction pédagogique

Dans les apprentissages mathématiques, il joue un rôle important pour la compréhension et la maîtrise des notions enseignées. Cinq pistes peuvent être distinguées :

– le calcul mental permet aux élèves de construire et de renforcer leurs premières connaissances relatives à la structuration arithmétique des nombres entiers naturels (relations additives ou multiplicatives entre les nombres) ;
– la pratique du calcul réfléchi s'appuie, le plus souvent implicitement, sur les propriétés des opérations et, en retour, en assure une première compréhension ;
– les premiers maniements des notions mathématiques (qui en permettent la compréhension initiale) sont le plus souvent fondés sur le recours au calcul mental. Que l'on pense aux situations de proportionnalité ou aux travaux sur les fractions à l'école

primaire ou, plus tard, aux calculs sur les nombres relatifs ou au calcul algébrique ; pour l'essentiel, les compétences des élèves se construisent dans un domaine numérique où domine le calcul mental ;
– le calcul réfléchi nécessite l'élaboration de procédures originales et, par là, contribue au développement des capacités de raisonnement des élèves (d'où l'expression de « calcul raisonné ») ;
– le calcul mental apporte souvent une aide à la résolution de problèmes, en permettant de ramener un problème à un champ numérique dans lequel les opérations deviennent plus familières : essayer avec des nombres plus petits permet, par exemple, d'avoir une intuition d'un mode de traitement possible.

Points d'appui pour la mémorisation

Certains élèves mémorisent facilement les tables d'addition ou de multiplication et les résultats indispensables à une bonne sûreté en calcul. D'autres ne parviennent pas à une mémorisation satisfaisante, malgré un entraînement répété. En effet, s'il est indispensable, l'entraînement n'est pas le seul ressort de la mémorisation. Une bonne représentation mentale des nombres, la compréhension des opérations en jeu et une élaboration progressive des résultats constituent l'autre facette, tout aussi indispensable, de l'aide à la mémorisation.

Importance de la représentation des nombres

Les représentations des nombres sont intériorisées en prenant appui sur des représentations imagées ou symboliques. Dans les premières, on trouve les constellations (dés, dominos, jeu de cartes) ou les figurations à l'aide des doigts. Les secondes sont liées aux codages issus des systèmes de numération, chiffrée ou verbale. Il est donc important, dans les premiers apprentissages des nombres, de consolider les images mentales des « petits nombres », à partir de leurs représentations sous forme de constellations. De même, les nombres compris entre cinq et dix doivent être mis en relation avec leurs décompositions par rapport à cinq (la capacité à afficher instantanément un nombre inférieur à dix avec leurs dix doigts est pour cela une aide précieuse) ou avec leurs compléments à dix.
Ces représentations figuratives ou symboliques ne concernent pas seulement chaque nombre séparément, mais impliquent aussi des relations entre les nombres entiers dont l'ensemble est principalement structuré par deux rythmes. Le premier est la succession qui organise la suite verbale des noms de nombres :

un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf	dix	onze	

C'est une suite de mots (comptine) totalement ordonnée qui débute par un et dont chaque mot « appelle » le suivant. Plus loin, à partir de vingt et avec des ruptures entre soixante et cent, ce rythme se trouve davantage en accord avec celui de la numération chiffrée (en base dix).
Le second est créé par la numération chiffrée en base dix :

1 2 3 4 5 **10** 15 **20** 25

Elle est rythmée par les dizaines et les centaines : répétition périodique du chiffre des unités à l'intérieur d'une dizaine, répétition des dizaines à l'intérieur de centaines. C'est la raison pour laquelle les opérateurs simples sont + 1, + 10, – 1, – 10.
La mémorisation des résultats des tables d'addition et de multiplication est sans doute favorisée par une bonne maîtrise de ces deux rythmes. Pour l'addition, une première étape est marquée par la reconnaissance du fait qu'ajouter un revient à dire le nombre suivant. Pour la multiplication, on connaît l'importance de la capacité à compter de cinq en cinq, de huit en huit…
Les délais de réponses enregistrés auprès d'élèves en phase d'apprentissage montrent que les résultats additifs simples sont d'abord reconstruits (avant d'être produits instantanément), en utilisant progressivement différents points d'appui que l'enseignant doit aider à mettre en place :
– utilisation de la suite numérique, par surcomptage ;
– appui sur les doubles connus (5 + 4, c'est 1 de plus que 4 + 4) ;
– utilisation de la commutativité de l'addition (2 + 9 c'est comme 9 + 2) ;
– utilisation du passage par la dizaine (pour calculer 8 + 5, on « complète à dix », on ajoute d'abord deux à huit puis trois à dix – ce qui suppose de connaître les compléments à dix et les décompositions additives des nombres inférieurs à dix).
L'objectif est bien que, au début du cycle 3, les élèves soient capables de fournir instantanément tous les résultats des tables d'addition, ainsi que les différences et les compléments associés. Ajoutons que la mémorisation fonctionne essentiellement sur un format verbal (acoustique). Ainsi, parmi les résultats symétriques (comme 7 + 5 et 5 + 7), l'un est toujours plus disponible que l'autre. Une autre caractéristique importante réside dans le rôle joué par les doubles : ils sont toujours rappelés de façon plus sûre et plus rapide que les autres résultats, ce qui permet des stratégies efficaces de calcul.
Pour les résultats multiplicatifs, la reconstruction est plus difficile et il faut viser, avant la fin du cycle 3, une mémorisation totale des produits des tables et leur utilisation pour répondre à des questions du type : « Combien de fois 7 dans 56 ? », « 56 divisé par 7 ? » ou « Décomposer 56 sous forme de

produits de deux nombres inférieurs à 10 ». Les points d'appui pour la construction des résultats pendant la phase d'apprentissage sont en partie différents de ceux relatifs au répertoire additif. L'élève peut prendre appui :
– sur les résultats rapidement connus des tables de deux et de cinq ;
– sur le comptage de *n* en *n* pour retrouver un résultat à partir d'un résultat mémorisé ;
– sur la connaissance des carrés, souvent bien maîtrisés ;
– sur la commutativité de la multiplication ;
– sur le fait que multiplier par quatre, c'est doubler deux fois ou que multiplier par six revient à tripler, puis doubler ;
– sur des particularités et des régularités repérées dans la table de Pythagore, par exemple le fait de multiplier un nombre par neuf revient à prendre le prédécesseur de ce nombre comme chiffre des dizaines et le complément à neuf de ce dernier comme chiffre des unités ($6 \times 9 = 54$; 5 c'est $6 - 1$ et $5 + 4 = 9$).

Conditions de la mémorisation

Mémoriser les tables est le résultat d'un très long processus. Commencée au début du cycle 2, la mémorisation des tables d'addition n'est souvent véritablement accomplie qu'au cours de la première année du cycle 3. Amorcée en fin de cycle 2, celle des tables de multiplication n'est pas encore achevée pour tous les élèves en fin de cycle 3 (il faut cependant en viser la maîtrise à la fin de ce cycle). Il s'agit pourtant de connaissances indispensables pour la vie quotidienne aussi bien que pour les apprentissages mathématiques. Tout doit donc être fait pour améliorer les performances des élèves.
La première condition d'une mémorisation réside dans la compréhension des opérations en jeu. L'élève est d'abord capable de calculer « quatre plus trois » parce qu'il est capable d'évoquer « quatre objets réunis avec trois objets » ou parce qu'il sait que le résultat est le nombre qui est situé « trois après quatre » sur la bande numérique, donc parce l'addition a du sens pour lui. Il n'y a pas encore mémorisation et, pourtant, c'est la première étape de la mémorisation. Certains enfants sont capables très tôt d'élaborer des résultats de façon purement mentale. D'autres ont par exemple recours à leurs doigts. Ce recours ne doit être ni encouragé ni interdit, ce qui, dans ce dernier cas, laisserait des enfants démunis face aux calculs proposés. Par contre, il n'est pas opportun, dans les moments de calcul mental, de mettre des jetons à disposition des enfants, comme aide au calcul : il n'y aurait alors plus de calcul mental !
La deuxième condition réside dans la prise de conscience de l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer d'un répertoire de résultats. Dans un premier temps, l'enseignant peut recenser des résultats au fur et à mesure qu'ils sont élaborés par les élèves (sans ordre déterminé), les noter sur une affiche et permettre aux élèves d'y avoir recours pour répondre à des questions, sans qu'il soit nécessaire de les reconstruire : il s'agit d'une première étape vers la mémorisation. Progressivement, ce répertoire est ensuite organisé, complété et structuré en tables.
La troisième condition réside, pour l'élève, dans la prise de conscience du fait que certains résultats sont mémorisés et qu'un répertoire mental est en train de se constituer. Pour l'addition, il est souvent limité au début à la connaissance de quelques doubles et à la prise de conscience du fait que « ajouter un » revient à dire le suivant (« je connais quatre plus un, c'est celui qui vient après quatre, c'est cinq »).
La quatrième condition réside dans la capacité à utiliser ce qu'on sait pour obtenir d'autres résultats : « quatre plus trois, c'est un de plus que trois plus trois », « six fois huit, c'est huit de plus que cinq fois huit », « quatre fois sept, c'est le double de deux fois sept ». La mise en place de points d'appui est donc une étape décisive de la mémorisation : connaissance des doubles, décompositions en appui sur le nombre cinq, complément à dix pour la table d'addition ; carrés, tables de deux et de cinq, etc., pour la multiplication.
L'utilisation de certaines propriétés des opérations permet également d'économiser la quantité de résultats à mémoriser, en particulier la commutativité (« sept fois quatre, c'est comme quatre fois sept »).
Ajoutons que, pour l'addition, à l'issue de l'apprentissage, certaines personnes n'ont mémorisé qu'une partie du répertoire et, à partir de là, reconstruisent l'autre partie, alors que d'autres ont mémorisé tous les résultats.
Pour la multiplication, une mémorisation complète s'avère, à terme, plus efficace.
La cinquième condition réside dans l'entraînement des résultats mémorisés. La mémorisation est favorisée par l'entraînement et probablement par la diversité des représentations mises en jeu. La répétition verbale rituelle des « tables », dans l'ordre croissant, engendre des risques, en particulier celui de ne pas pouvoir fournir un résultat sans réciter toute la table ou celui d'une confusion entre résultats voisins. Mieux vaut donc, s'agissant d'entraînement et de construction des « tables », ne pas procéder toujours par ordre croissant.
Les équipes de cycle ont donc à examiner soigneusement dans quelle mesure ces différentes conditions de la mémorisation sont prises en charge à l'école. Car si le travail d'entraînement est souvent assuré par les familles, l'essentiel des activités qui contribuent à une bonne mémorisation relève bien du travail scolaire, qui ne peut être limité au contrôle de ce qui doit être su.

Disponibilité des résultats

Un dernier point mérite d'être souligné. Il a déjà été dit que la récitation des tables, dans l'ordre croissant, pouvait constituer une gêne pour une mémorisation efficace. Il convient d'ajouter un autre élément essentiel. Connaître ses tables, ce n'est pas seulement être capable de dire instantanément n'importe quel résultat ; c'est aussi être capable d'exploiter rapidement cette connaissance pour donner un résultat connexe. Connaître 7 + 6, c'est être capable de répondre 13 immédiatement, mais c'est également pouvoir répondre immédiatement à « Combien de 7 pour aller à 13 ? », « combien de 6 pour aller à 13 ? », « 13 – 6 ? », « 13 – 7 ? » ou encore à produire très vite, entre autres, 7 + 6 et 6 + 7 lorsque sont demandées des décompositions additives de 13. De même, connaître 7 × 6, c'est être capable de répondre 42 immédiatement, mais c'est également pouvoir répondre immédiatement à « Quel nombre multiplié par 7 donne 42 ? », « Quel nombre multiplié par 6 donne 42 ? », « 42 divisé par 7 ? », « 42 divisé par 6 ? » ou encore à produire très vite 7 × 6 et 6 × 7 lorsque sont demandées des décompositions multiplicatives de 42.
De telles questions doivent être posées dès le départ des apprentissages.

Calcul réfléchi – diversité des procédures

Le calcul réfléchi est d'une autre nature que le calcul automatisé. Il ne s'agit plus de récupérer directement en mémoire un résultat ou une procédure directement applicable, mais d'élaborer une procédure adaptée au calcul particulier qui est proposé. Stratégie et raisonnement sont alors sollicités. D'autres représentations des nombres sont mobilisées, notamment celles qui sont liées à leur expression dans les deux systèmes de numération utilisés, numération chiffrée et numération orale. Ces deux numérations ne sont pas exactement superposables. La traduction chiffrée de « quatre-vingt-douze » ne fait intervenir ni 4, ni 20, ni 12. C'est une première raison pour laquelle il n'est pas équivalent de proposer un calcul à faire mentalement sous la forme écrite « 92 + 15 = ? » et sous la forme orale « quatre-vingt douze plus quinze ». Une autre raison relève de la mémorisation : dans le premier cas, la consigne reste visible alors que dans le second, elle doit être enregistrée, ce qui occupera une partie de la mémoire de travail.
Examinons quelques procédures qui peuvent être mises en place pour traiter deux calculs apparemment proches :

25 × 12
P1 : calcul séparé de 25 × 10 et de 25 × 2, puis somme des résultats partiels. **P2 :** décomposition de 12 en 4 × 3, et calcul de 25 × 4, puis de 100 × 3. **P3 :** utilisation du fait que 25 est le quart de 100, en divisant d'abord 12 par 4, puis en multipliant le résultat par 100 (ou multiplication de 12 par 100, puis division du résultat par 4).
25 × 19
P4 : calcul de 25 × 20 (directement ou par 25 × 2 × 10), puis soustraction de 25 au résultat obtenu. **P5 :** calcul de 19 × 20 (par 19 × 2 × 10), puis de 5 × 19 (nouveau calcul réfléchi qui peut être traité par la somme de 5 × 10 et de 5 × 9, par exemple), puis somme des deux résultats partiels.

Bien que 25 soit un des facteurs des deux produits, sa présence n'induit pas les mêmes stratégies de calcul et les procédures choisies dépendent des connaissances préalables des élèves à partir desquelles ils analysent les nombres en présence. Ainsi, pour utiliser P3, il faut savoir que 25 est le quart de 100, mais aussi que 12 est un multiple de 4. Pour reconnaître que P3 est difficilement applicable pour 25 × 19, il faut savoir que 19 n'est pas un multiple de 4…
Par ailleurs, comme cela a déjà été souligné, le calcul réfléchi suppose la mise en œuvre, souvent implicite, de diverses propriétés des opérations en jeu.
En calcul réfléchi, aucune procédure ne s'impose *a priori* et, le plus souvent, plusieurs sont possibles. Le travail en classe doit donc être axé sur l'explicitation et la confrontation des procédures possibles et efficaces (voir « Les moments de calcul mental », page suivante).
Par ailleurs, un calcul réfléchi effectué mentalement mobilise une partie de la mémoire de travail, éventuellement pour le maintien de l'énoncé (s'il est donné sous forme orale) et dans tous les cas pour la représentation des règles de calcul et la mémorisation de résultats intermédiaires. Une cause possible d'erreur de calcul provient de la « saturation » de la mémoire de travail. Ce risque de saturation peut être diminué en autorisant les élèves à noter des résultats intermédiaires ou, dans certains cas, en notant au tableau le calcul à effectuer. Mais il ne faut pas oublier que le calcul mental privilégie le traitement des nombres conçus du point de vue de la numération orale : l'énoncé oral des calculs à effectuer est donc à privilégier.
Le cas du calcul approché est encore plus délicat. Non seulement il faut choisir une procédure de calcul, mais, de plus, il faut décider de l'approximation voulue (si elle n'est pas donnée) et choisir les arrondis pour chaque nombre intervenant dans le calcul.

Considérons l'exemple de la recherche d'une approximation pour 439×17. On peut hésiter entre le calcul de 400×20, 450×20 ou 500×15. Chacun d'entre eux fournit une approximation acceptable si on se contente d'avoir un résultat à environ 500 près. Pourtant ces calculs sont *a priori* très différents. C'est pourquoi les premiers exercices de calcul approché peuvent être centrés sur la détermination du choix d'un ou plusieurs résultats plausibles parmi un ensemble de résultats fournis ou sur le repérage d'un nombre rond proche du résultat, sur la droite numérique, ce qui revient à déterminer un ordre de grandeur du résultat.
Entraîner les élèves à évaluer les effets prévisibles des choix effectués constitue une autre dimension du calcul approché qui, moins encore que le calcul réfléchi « exact », ne peut être mécanisé. Sa pratique, dans les deux dernières années du cycle 3, est pourtant importante pour entraîner les élèves à contrôler les résultats qu'ils obtiennent par un calcul instrumenté ou par un calcul posé.

Les moments de calcul mental

À quels moments le calcul mental a-t-il sa place en classe et sous quelles formes ?
Le calcul mental est d'abord un moyen efficace de calculer. C'est donc intégré aux autres activités qu'il doit d'abord vivre dans la classe. Son intérêt pratique majeur réside dans son utilité pour la vie quotidienne, dans la mesure où il suffit souvent pour prendre une décision et permet également de contrôler un résultat affirmé par une autre personne ou obtenu à l'aide d'une machine. Il doit être encouragé chez les élèves, par une forme d'imprégnation, dans toutes les activités, dès lors qu'il permet de répondre plus rapidement et aussi efficacement qu'en posant les opérations ou qu'en utilisant la calculatrice. Il peut, ainsi, être utilisé au cours de différentes activités fonctionnelles : déplacement en autobus, éducation physique, consultation d'un calendrier, d'un catalogue ou d'un horaire, etc.
Dès le CP, des moment spécifiques doivent, chaque jour, être ménagés pour l'entraînement au calcul mental automatisé et pour l'exercice du calcul mental réfléchi. En fonction de l'objectif poursuivi, ils prennent des formes différentes.
Dans la phase où il s'agit d'entretenir et de contrôler la mémorisation de résultats (tables, relations entre nombres du type 5, 20, 25, 50, 75, 100…) ou l'automatisation de procédures (compléments à la dizaine supérieure, multiplication ou division par 10, par 100…), des séquences brèves (cinq à dix minutes) sont appropriées. De telles séquences de calcul peuvent être conduites avec la classe entière ou par groupes de huit à dix. Il est souhaitable qu'elles débutent par une activité très facile, quasi-rituelle et destinée surtout à focaliser l'attention. La consigne est orale. En petit groupe, la réponse peut être individuelle et orale. En plus grand groupe, elle peut être écrite (sur ardoise ou papier) ou être choisie parmi des cartes-réponses. Selon les séances, l'enseignant peut utiliser le procédé Lamartinière dans lequel, après avoir été noté sur l'ardoise, chaque résultat est immédiatement corrigé, ou faire inscrire l'ensemble des résultats sur une feuille de papier pour ne les exploiter qu'à la fin de l'interrogation. Dans ce type de calcul, centré sur le résultat, la rapidité est un objectif visé, car il s'agit de faire maîtriser un répertoire avec sûreté.
Dans la phase où il s'agit de travailler le calcul réfléchi (résultats exacts ou approchés), les séquences peuvent être nettement plus longues (un quart d'heure à une demi-heure). Elles sont, en général, menées en grand groupe. Pour chaque question, il faut laisser un temps de recherche aux élèves. Vient ensuite le moment d'expliciter les procédures utilisées dans la classe, éventuellement de les traduire par écrit, avant de les discuter et de justifier leur pertinence et leur efficacité. L'enseignant conclut enfin par une brève synthèse. Il peut être envisagé d'entraîner à l'exécution de certains types de calculs, pour obtenir des réponses rapides, mais en gardant à l'esprit que l'élève conserve le choix de la procédure qui lui paraît la mieux adaptée ou la plus sûre. Ainsi pour calculer 23 + 9 ou 44 + 9, il est commode d'utiliser la suite d'opérateurs + 10 suivi de – 1. Il faut cependant prendre garde à faire apparaître les limites de ces procédés : pour 30 + 9 ou pour 31 + 9, d'autres procédures plus rapides sont disponibles. Et même pour 44 + 9, certains élèves peuvent préférer ajouter successivement 6 et 3 à 44, simplement parce qu'ils ont du mal à reculer dans la suite des nombres. Pour résumer, certaines procédures peuvent être pointées comme souvent efficaces, mais liberté doit être laissée à l'élève de choisir la procédure qu'il est le mieux à même de mener à son terme. Pour d'autres types de calculs, c'est un véritable « problème de calcul » qui est posé, c'est-à-dire une opération pour laquelle il n'existe pas de stratégie clairement privilégiée (par exemple 348 + 257). Dans ce cas, la rapidité d'exécution n'est nullement un objectif et l'on favorisera l'explicitation des procédures des uns et des autres. Ceci dans le but d'en faire découvrir de nouvelles et de pouvoir les utiliser ultérieurement.
Dans tous les cas (calcul automatisé ou calcul réfléchi), les questions peuvent porter directement sur les nombres ou être situées dans le cadre de la résolution de « petits problèmes » dans des contextes variés : sens des opérations et entraînement au calcul mental sont alors travaillés simultanément. Ajoutons qu'il n'est pas équivalent de poser la question : « Calculer

17 + 23 » (oralement ou par écrit) et le problème : « Arnaud avait 17 billes et en gagne 23 ; combien en a-t-il maintenant ? » Chacun de ces énoncés active une représentation différente de la tâche à accomplir. Dans le premier cas, elle porte sur des nombres « purs », dans le second cas, elle s'appuie sur l'évocation d'un certain champ de réalité. L'expérience montre surtout qu'il s'agit, dans le second cas, d'un moyen efficace d'aider les élèves à progresser dans la maîtrise du « sens des opérations ».

En dehors des séquences décrites ci-dessus, des situations de jeux, stratégiques ou non, utilisant des supports classiques (dés, dominos, cartes, jeux et logiciels du commerce…) ou spécifiques mettent en jeu des décompositions numériques ou des calculs simples et fournissent des occasions de rappel des résultats arithmétiques simples et des matières à calculs. Ces situations peuvent intervenir dans le cadre d'ateliers, en groupes restreints ou bien en fond de classe. On en trouvera des exemples ci-après.

Programmation des objectifs

Pour chaque cycle, sont précisés les objectifs relatifs au domaine addition-soustraction et au domaine multiplication-division, en distinguant chaque fois ceux qui relèvent du calcul automatisé (résultats mémorisés ou construits instantanément) et du calcul réfléchi. Il convient de ne jamais oublier qu'avant d'être automatisé, tout calcul a, le plus souvent, d'abord été obtenu par les élèves au moyen d'un calcul réfléchi, pendant une phase plus ou moins longue. Les tableaux qui suivent sont destinés à fournir des repères aux enseignants. Ceux-ci ne sont donnés qu'à titre indicatif : certaines compétences peuvent être maîtrisées plus rapidement par certains élèves, alors que d'autres nécessiteront un travail prolongé au-delà des périodes mentionnées.

Les compétences notées en italiques peuvent être maîtrisées pendant la première moitié du cycle, les autres relèvent plutôt de la seconde moitié. Les compétences relatives au calcul automatisé qui, pour un cycle donné, ne sont pas notées en italique sont cependant à travailler dès le début du cycle du point de vue du calcul réfléchi.

Les exemples fournis sont toujours écrits en chiffres, ce qui ne signifie pas que les calculs soient présentés ainsi aux élèves. En effet, un calcul peut être proposé soit de façon uniquement orale (les formulations pouvant varier pour un même calcul), soit en accompagnant la formulation orale d'un écrit au tableau, soit par un écrit en ligne. Le résultat peut lui-même être demandé oralement (interrogation à la volée) ou par écrit (ardoise, fiche).

Pour chaque cycle, sont distingués les domaines addition/soustraction et multiplication/division, mais il convient de ne pas oublier que les compétences mentionnées doivent, au cycle 3, pouvoir être mises en œuvre dans des calculs faisant intervenir l'ensemble des opérations (par exemple, dans des jeux du type « le compte est bon »).

Objectifs pour le cycle 2

Domaine de l'addition et de la soustraction	
Calcul automatisé	
Compétences	**Commentaires**
■ *Ajouter ou retrancher 1, en particulier pour les nombres inférieurs à 20.*	Au cycle 2, pour l'essentiel, ces compétences sont à assurer sur des *nombres dits* (oralisés). La prise de conscience du fait qu'ajouter 1 et retrancher 1 revient à dire le nombre suivant et le nombre précédent constitue une étape importante dans l'apprentissage du calcul (en 2e année de cycle). La maîtrise par les élèves de la suite orale et écrite des nombres, dans un sens et dans l'autre, facilite cette compétence. Elle assure chez les élèves la synonymie des expressions : – ajouter 1 et avancer de 1 (dans la comptine orale ou sur la file numérique) ; – soustraire 1 ou retrancher 1 et reculer de 1 (dans la comptine orale ou sur la file numérique).

Compétences	Commentaires
■ Ajouter ou retrancher 2 et 5, en particulier pour les nombres inférieurs à 20.	Pour 2, on distinguera le cas où le nombre de départ est pair (compétence qui peut déjà être travaillée en 2e année de cycle) et ceux où il est impair (plutôt 3e année de cycle). Pour 5, le même type de distinction peut être fait selon que le nombre de départ est multiple de 5 ou non. Là encore, le comptage de 2 en 2 ou de 5 en 5, en avant et en arrière, constitue un point d'appui.
■ Ajouter ou retrancher 10, puis 100.	Pour l'ajout de 10 à un multiple de 10 (inférieur à 100), une première maîtrise peut être visée en fin de 2e année de cycle. Pour l'ajout et le retrait de 10 ou de 100 à tout nombre de deux ou trois chiffres, il s'agit plutôt d'un objectif qui relève de la 3e année du cycle. Là encore, le comptage de 10 en 10, puis de 100 en 100, en avant et en arrière, constitue un point d'appui.
■ *Connaître les compléments à 10 ou à 20,* puis à la dizaine supérieure (pour les dizaines inférieures à 100).	Cette connaissance est particulièrement utile pour élaborer des stratégies de calcul et doit donc être entraînée régulièrement pour devenir disponible de façon rapide et sûre. La connaissance des compléments à 20 (17 pour aller à 20, 3 pour aller à 20, par exemple) peut constituer une aide à la mémorisation des noms des nombres inférieurs à 20.
■ *Décomposer un nombre inférieur à 10 à l'aide du nombre 5.* ■ *Décomposer un nombre compris entre 10 et 20 à l'aide du nombre 10.*	*Ce type de décomposition favorise une représentation mentale des nombres favorable au calcul mental et à la maîtrise du répertoire additif. Il correspond aussi à la représentation des nombres à l'aide des doigts.*
■ *Additionner deux nombres dont la somme est inférieure à 10 et décomposer un nombre inférieur à 10 sous forme additive.*	Il s'agit d'une première étape vers la maîtrise du répertoire additif.
■ Maîtriser le répertoire additif (tables d'addition) : sommes de deux nombres inférieurs à 10, compléments, différences et décompositions associés.	La mémorisation du répertoire additif ou la capacité à en reconstruire instantanément les résultats s'élabore sur une très longue période de temps qui couvre le cycle 2 et le tout début du cycle 3 (voir « Points d'appui pour la mémorisation », page 34). L'appui sur la connaissance de certains résultats plus rapidement maîtrisés est essentiel : doubles, décompositions par rapport à 5 et à 10, compléments à 10… Très tôt, il convient de ne pas limiter les interrogations à l'obtention de sommes, mais de demander également les compléments, les décompositions et les différences qui sont associés aux éléments des tables travaillées.
■ Calculer des sommes, des différences ou des compléments du type 20 + 7, 27 – 7, 20 pour aller à 27, puis 200 + 37, 237 – 37, 200 pour aller à 237.	Ces calculs sont directement liés à la compréhension de la numération décimale.
■ Ajouter ou retrancher entre elles des dizaines ou des centaines, calculer les compléments correspondants.	Il s'agit de calculs du type 20 + 30, 70 + 80, 200 + 300, 700 + 800, 50 – 20, 150 – 80, 500 –300, 1 500 – 700, 20 pour aller à 50…

Calcul réfléchi

En grande section d'école maternelle, aucune compétence en calcul n'est visée, mais dans différents contextes, les élèves résolvent des problèmes dans lesquels il faut chercher le résultat d'une augmentation, d'une diminution ou le nombre atteint à la suite d'un déplacement en avant ou en arrière sur une piste numérotée…

Il est également rappelé que les calculs mentionnés dans la rubrique « Calcul automatisé » sont d'abord traités par les élèves du point de vue du calcul réfléchi.

Enfin, il faut souligner trois points importants :

– la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celle qui est donnée ici peut donc être adaptée par les enseignants ;

– les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu ;
– l'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorisent les progrès des élèves.

Compétences	Commentaires
■ *Ajouter et retrancher un nombre à un chiffre à un nombre inférieur à 100*, puis inférieur à 1 000.	*Ces calculs peuvent être effectués en notant que dans certains cas il suffit d'agir uniquement sur le chiffre des unités, dans d'autres cas en passant par la dizaine supérieure ou inférieure ou en décomposant puis en utilisant le répertoire additif.*
■ Ajouter ou retrancher un nombre entier de dizaines ou de centaines à un nombre de deux ou trois chiffres.	*Exemples :* 57 + 30, 57 – 30, 256 + 20, 256 –20, 54 + 50, 67 + 40. Dans les cas où un passage de la dizaine est nécessaire, le calcul réfléchi peut être aidé par l'utilisation de l'écrit.
■ Ajouter et retrancher deux nombres.	Exemples de cas qui peuvent être directement calculés en agissant séparément sur les dizaines et les unités : 35 + 13, 47 – 23, 54 – 24. Dans les cas où un passage de la dizaine est nécessaire, le calcul réfléchi peut être aidé par l'utilisation de l'écrit.
■ Calculer des écarts ou des compléments (nombres de deux ou trois chiffres).	Dans des cas « simples » (comme la recherche du complément de 26 à 42), le calcul peut être purement mental en fin de cycle. Le plus souvent, le recours à l'écrit pour noter les étapes du calcul et les écarts intermédiaires est nécessaire.
■ Identifier les nombres dont la somme est un « nombre rond » et les utiliser pour calculer des sommes de plusieurs nombres.	Exemple : le calcul de 26 + 7 + 4 + 13 est facilité par le rapprochement de 26 avec 4 et de 7 avec 13. De même le calcul de 47 + 23 est facilité par la reconnaissance du fait que 7 + 3 = 10.
■ Adapter les stratégies utilisables pour la soustraction, selon qu'on a à soustraire un « petit nombre » ou un « grand nombre ».	Pour calculer mentalement 52 – 3, on peut choisir d'enlever 3 de 52 ou de reculer de 3 à partir de 52 (par exemple de 2, puis de 1), alors que pour calculer 52 – 49, il peut paraître préférable de chercher à compléter 49 pour atteindre 52.

Domaine de la multiplication et de la division

Calcul automatisé

Compétences	Commentaires
■ *Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés correspondantes.*	La connaissance de ces doubles et des moitiés (doubles des nombres de 1 à 10) sert de point d'appui pour la construction d'autres résultats.
■ Connaître les doubles (et les moitiés correspondantes) de nombres clés : 10, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 300, 400, 15, 25.	Cette connaissance s'appuie sur celle des doubles de nombres inférieurs à 10. Elle peut être visée en fin de cycle 2.
■ Connaître les tables de multiplication par 2 et par 5.	Des observations sur les régularités des résultats en favorisent la mémorisation. Dès les débuts de cet apprentissage, la connaissance des résultats doit permettre de répondre aux questions du type : « Combien de fois 5 dans 35 ? »
■ Multiplier par 10 et par 100.	La procédure de calcul qui consiste à décaler les chiffres d'un rang ou deux vers la gauche doit être reliée au fait que, par exemple, multiplier 13 par 10 revient à chercher le nombre que représentent 13 dizaines (ce qui aura été établi au moment où les résultats correspondants auront été trouvés par calcul réfléchi).

Calcul réfléchi	
En grande section d'école maternelle et au CP, aucune compétence en calcul n'est visée dans le domaine de la multiplication et de la division ; mais dans différents contextes, les élèves résolvent des problèmes dans lesquels il faut chercher le résultat de la réunion de plusieurs collections identiques ou la part de chacun dans une situation de partage ou de distribution… Il est également rappelé que les calculs mentionnés dans la rubrique « Calcul automatisé » sont d'abord traités par les élèves du point de vue du calcul réfléchi. Enfin, il faut souligner trois points importants : – la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celle qui est donnée ici peut donc être adaptée par les enseignants ; – les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu ; – l'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorisent les progrès des élèves.	
Compétences	**Commentaires**
■ Calculer les doubles de nombres inférieurs à 50.	Ce travail est réalisé de façon progressive, en tenant compte de la difficulté de calcul du double, les doubles des nombres ronds et les nombres dont le chiffre des unités est 5 constituant des points d'appui utiles.
■ Calculer les moitiés de nombres inférieurs à 100 : nombres entiers de dizaines, nombres pairs.	Parmi ces nombres, les moitiés de ceux dont le chiffre des dizaines est pair seront d'abord travaillées. Pour ces deux compétences, certaines relations sont à privilégier (voir le programme du cycle 2 : relations entre 5 et 10, entre 25 et 50, entre 50 et 100, entre 15 et 30, entre 30 et 60, entre 12 et 24).
■ Calculer le produit de deux nombres inférieurs à 10.	En dehors de celles de 2 et de 5, la mémorisation des tables de multiplication relève du cycle 3. Mais, dès la fin du cycle 2, tous les résultats doivent pouvoir être reconstruits par les élèves, soit en utilisant l'addition itérée, soit en s'appuyant sur quelques résultats connus (notamment les produits de la table de 5) : ainsi 8×6 peut être construit comme « 8 de plus que 8×5 », l'usage du mot « fois » facilitant cette relation (6 fois 8, c'est 5 fois 8 et encore 1 fois 8). Le fait que la multiplication est commutative doit être mis rapidement en évidence, la connaissance de « 5 fois 8 » entraînant alors celle de « 8 fois 5 » et l'égalité correspondante : $5 \times 8 = 8 \times 5$.
■ Utiliser un produit connu pour calculer un « produit voisin ».	Voir l'exemple ci-dessus.

Objectifs pour le cycle 3

N.B. – Les compétences mentionnées pour le cycle 2 doivent faire l'objet au cycle 3 d'un travail visant à les stabiliser et à les enrichir.

Domaine de l'addition et de la soustraction	
Calcul automatisé	
Compétences	**Commentaires**
■ *Maîtriser le répertoire additif (tables d'addition) : sommes de deux nombres entiers inférieurs à 10, compléments, différences et décompositions associés.*	La capacité à fournir instantanément de tels résultats est évidemment essentielle. La stabilisation complète du répertoire additif est très rarement achevée avant l'entrée cycle 3. Le travail doit donc être poursuivi pour permettre aux élèves de mémoriser de nouveaux résultats, de reconstruire très rapidement ceux qui ne sont pas mémorisés en s'appuyant sur ceux qui le sont, et cela aussi bien pour calculer des sommes, des différences, des compléments ou obtenir des décompositions.

Compétences	Commentaires
■ *Ajouter ou retrancher entre elles des dizaines, des centaines, des milliers… ; calculer les compléments correspondants.*	Cette capacité est construite sur la base des résultats du répertoire et peut être travaillée en même temps que ceux-ci se mettent en place : 8 000 – 5 000 est directement déduit de la connaissance de 8 – 5, alors que 1 500 – 700 peut être pensé comme 15 centaines diminuées de 7 centaines. Une bonne connaissance du système de numération est donc également nécessaire.
■ *Calculer, avec des nombres entiers, des sommes, des différences ou des compléments du type 200 + 70, 270 – 70, 200 pour aller à 270, ou 2 000 + 37, 2 037 – 37, 2 000 pour aller à 2 037…*	Là encore, une bonne maîtrise de la numération chiffrée et parlée suffit pour traiter de tels calculs.
■ *Ajouter ou soustraire un nombre entier (inférieur à 10) d'unités, de dizaines, de centaines, de milliers… à un nombre quelconque, dans des cas sans retenue* et dans des cas avec retenue.	Il s'agit de calculs du type : 86 + 3, 386 + 50, 3 689 + 600, 86 – 3, 436 – 50… dont la maîtrise nécessite à nouveau une bonne connaissance des résultats du répertoire additif et de la numération décimale (valeur positionnelle des chiffres). En particulier, la compétence à ajouter un nombre inférieur à 10 à un nombre inférieur à 100 (comme compter de 7 en 7 à partir de 14) est indispensable pour le travail sur les tables de multiplication.
■ *Calculer les compléments d'un nombre entier à la dizaine supérieure.*	Cette compétence est une adaptation de la connaissance des compléments à 10 qui constitue donc un préalable à retravailler en début de cycle si elle n'est pas complètement maîtrisée.
■ Calculer les compléments à 100 et à la centaine supérieure pour des nombres entiers dont le chiffre des unités est 0.	Il s'agit d'une compétence très utile pour le calcul réfléchi, en passant d'abord à la dizaine supérieure, puis directement à la centaine supérieure. Exemples : compléments de 430 à 500, puis de 2 430 à 2 500.
■ Connaître les relations additives entre multiples de 25 inférieurs à 100 ou de multiples de 250 inférieurs à 1000.	Il s'agit par exemple de savoir que 75 = 50 + 25 ou que 1 000 – 750 = 250…
■ Calculer certaines sommes de deux nombres décimaux (avec un chiffre après la virgule), en particulier ajouter un entier et un décimal.	Certains calculs de sommes comme 14 + 3,7 ou 0,3 + 0,5 (ou même de différence comme 0,8 – 0,2) peuvent être demandés mentalement dès que l'addition et la soustraction des nombres décimaux ont été abordées. D'autres, comme 2,5 + 0,5 ou 3,7 + 0,6, devraient pouvoir être calculés très rapidement en fin de cycle. Ceux du même type qui sont relatifs à la soustraction (comme 4,3 – 0,6) relèvent plutôt du calcul réfléchi.
■ Décomposer un nombre décimal en utilisant l'entier immédiatement inférieur.	Cette compétence est en lien direct avec la compréhension de l'écriture à virgule (exemple : 37,05 = 37 + 0,05 ou 37,05 = 37 + 5 / 100 qui justifie en particulier la lecture 37 et 5 centièmes).
■ Calculer les compléments à l'unité supérieure de nombres ayant un chiffre après la virgule.	La première étape réside dans la connaissance des compléments à 1 de nombres comme 0,3 ou 0,5…, puis dans celle de compléments comme 7,3 à 8 ou 9,5 à 10… Cette compétence, comme la précédente, est conditionnée par la capacité à encadrer un décimal par deux entiers consécutifs.
■ Connaître quelques relations entre certains nombres entiers et décimaux.	Des résultats comme 2,5 + 2,5 = 5 ; 1,5 + 1,5 = 3 : 7,5 + 7,5 = 15 doivent être produits très rapidement en fin de cycle 3.

Calcul réfléchi

Au cycle 3, la frontière entre calcul automatisé et calcul réfléchi n'est pas toujours facile à préciser. À un même moment, elle peut varier d'un élève à l'autre et, surtout, elle se modifie au cours du cycle. Ainsi, certains calculs placés dans la rubrique précédente sont d'abord traités par les élèves à l'aide d'un raisonnement avant d'être automatisés. Il ne faut pas oublier que l'automatisation est le résultat d'un travail qui allie compréhension, raisonnement, explications et entraînement, ce dernier n'étant pas le seul élément de la mise en mémoire de résultats ou de procédures.

Comme pour le cycle 2, il faut souligner trois points importants :
– la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celle qui est donnée ici peut donc être adaptée par les enseignants ;
– les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu;
– l'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorisent les progrès des élèves.
Enfin, se met en place au cours du cycle 3, un nouveau travail dont le but est de les rendre capables d'estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (calcul approché) qui suppose des compétences de nature nouvelle: accepter d'avoir des estimations différentes également acceptables, choisir les nombres sur lesquels on va calculer en fonction de l'ordre de grandeur de l'estimation recherchée, déterminer cet ordre de grandeur dans une situation donnée…

Compétences	Commentaires
■ *Ajouter ou soustraire des nombres entiers ronds.*	La proximité de nombres tels que 9, 19, 11, 21, 8, 18, 12, 22, 99, 101, 198… avec des dizaines ou des centaines entières simples peut inciter à les utiliser dans le calcul. Pour ajouter 29 à 247, il est commode, pour certains, d'ajouter d'abord 30, puis de retrancher 1 au résultat obtenu. Cette procédure doit donc être explicitée dans la classe, mais sans qu'elle s'impose nécessairement à tous comme la plus facile. Certains préféreront ajouter d'abord 20, puis 9 au résultat obtenu, ce qui est une procédure tout aussi légitime. Par ailleurs, si on doit ajouter 29 à 400 ou à 50 ou encore à 71, le meilleur procédé ne consiste certainement pas à ajouter 30, puis à retrancher 1. Comme dans tout calcul réfléchi, aucune procédure n'est généralisable. Le choix dépend toujours des compétences de l'élève, qu'il mobilise en fonction des nombres en jeu dans le calcul.
■ *Calculer des sommes de plusieurs nombres entiers en regroupant des termes « qui vont bien ensemble ».*	L'identification rapide de nombres qui, additionnés ou soustraits, donnent un résultat qui facilite la suite des calculs (nombres « ronds ») doit être entraînée chez les élèves. Un calcul peut également être transformé pour faire apparaître de tels nombres. Cela nécessite de mettre en œuvre, souvent implicitement, des propriétés des opérations en jeu. *Exemple :* le calcul de 43 + 280 + 60 + 57 + 20 peut être facilité par le « rapprochement » de 43 et 27 et de 280 et 20.
■ *Calculer des sommes et différences de nombres entiers de deux chiffres (ou dont le calcul peut s'y ramener).*	Il n'est pas indispensable, en calcul mental, de proposer des calculs trop compliqués pour lesquels l'utilisation d'une machine ou la pose de l'opération sont plus efficaces et plus rapides. Mais des calculs tels que 48 + 53, 50 – 13, 31 – 18, 450 – 180, 453 + 28, 3 600 + 1 400, 46 000 000 – 18 000 000… devraient être à la portée des élèves avant la fin du cycle 3. Diverses procédures sont toujours utilisables par les élèves. Par exemple, pour 31 – 18, ils peuvent : – soustraire 1, puis 10, puis 7 ; – soustraire 20, puis ajouter 2 ; – considérer que 31 – 18 est égal 30 – 17 (le résultat ne change pas si on ajoute ou retranche le même nombre aux deux termes de la différence) ; – chercher le complément de 18 à 31, en allant de 18 à 20, de 20 à 30, puis de 30 à 31… Des représentations, en relation avec la numération ou un appui sur la droite numérique, peuvent servir de support à l'explicitation des procédures, aider à les comprendre et en favoriser l'appropriation par d'autres élèves.

Compétences	Commentaires
■ Calculer des sommes ou des différences de nombres décimaux dans des cas simples.	Le calcul mental sur les décimaux constitue un bon support pour conforter la compréhension de la valeur des chiffres en fonction de leur position. Les calculs doivent rester simples et permettre aux élèves de se concentrer sur cette compréhension. Ainsi 5,7 + 2,3 calculé mentalement nécessite d'interpréter chaque nombre comme 5 unités 7 dixièmes et 2 unités 3 dixièmes, ce qui fait au total 7 unités et 10 dixièmes, et donc 8 unités car 10 dixièmes = 1 unité. Des nombres à un chiffre après la virgule ou du type 7,25 ; 8,15 ; 0,75 peuvent être utilisés avec intérêt. Pour un calcul comme 7,2 – 2,5, différentes stratégies sont possibles en fin de cycle 3 : – transformer 7,2 en 6 unités et 12 dixièmes pour rendre le calcul possible ; – chercher l'écart entre 2,5 et 7,2 en allant d'abord de 2 à 3 ou à 5, puis à 7, puis à 7,2 ; – calculer 72 – 25, puis diviser le résultat par 10…
■ Calculer le complément d'un nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule au nombre entier immédiatement supérieur.	Cette compétence est liée à la connaissance des compléments à 100 des nombres entiers à deux chiffres. Elle est en particulier utile au collège pour les calculs avec les pourcentages, avec les compléments à 1 de nombres comme 0,18 ; 0,45…
■ Évaluer un ordre de grandeur en utilisant un calcul approché : sommes de deux ou plusieurs nombres entiers ou décimaux, différences de deux nombres entiers ou décimaux.	Le calcul approché est une composante importante du calcul réfléchi : dans beaucoup de circonstances familières, il suffit d'obtenir rapidement une valeur approchée du résultat. Ceci permet également d'anticiper l'ordre de grandeur d'un résultat ou d'en contrôler la vraisemblance lorsqu'il a été obtenu par une machine ou par une technique écrite, y compris pour des nombres supérieurs à 100. On s'y prépare en repérant le nombre « rond » (dizaine entière, centaine entière, millier entier) le plus proche d'un nombre donné. La maîtrise du calcul sur de tels nombres est nécessaire à la pratique du calcul réfléchi. Le choix de l'arrondi est un moment difficile de ce type de calcul. Pour évaluer un ordre de grandeur de 127 + 694, on peut arrondir chacun des nombres à 130 et 690 aussi bien qu'à 130 et 700 alors que pour évaluer un ordre de grandeur de 1 827 + 185, on peut arrondir chacun des nombres à 1 800 et 200. Le placement approché de nombres sur la droite numérique repérée par des nombres ronds constitue une aide pour apprécier l'ordre de grandeur des nombres et choisir les arrondis appropriés dans un calcul.

Domaine de la multiplication et de la division	
Calcul automatisé	
Compétences	**Commentaires**
■ *Maîtriser le répertoire multiplicatif (tables de multiplication) : produits de deux nombres inférieurs à 10, recherche d'un facteur, quotients et décompositions associés.*	La capacité à fournir instantanément de tels résultats est essentielle. La stabilisation complète du répertoire multiplicatif nécessite au moins deux années de travail au cycle 3 et doit être soutenue dans la dernière année, puis au collège. Il faut souligner que la récitation mécanique des tables constitue un obstacle à la mobilisation rapide d'un résultat quelconque. Le repérage de régularités ou de particularités sur la table de Pythagore peut constituer une aide à la mémorisation. Et ne pas oublier que connaître 8 × 6 = 48, c'est tout autant pouvoir donner rapidement ce résultat que répondre à « Combien de fois 8 dans 48 ? », à « Diviser 48 par 6 » ou décomposer 48 sous forme de produits de deux nombres inférieurs à 10.
■ Utiliser la connaissance des tables pour répondre à des questions du type « Combien de fois 8 dans 50 ? » ou « Diviser 50 par 8 ».	Ce type de questions intervient en particulier dans le calcul posé ou réfléchi de quotients et de restes.
■ Situer un nombre entre deux résultats d'une table de multiplication.	Il s'agit, par exemple, d'encadrer 29 entre deux multiples de 7 (4 × 7 et 5 × 7).
■ *Multiplier et diviser par 10, 100, 1 000… les nombres entiers.*	Cette compétence doit être mise en relation avec le système de numération chiffrée : multiplier 34 par 10 revient à chercher une autre écriture de 34 dizaines ; diviser 340 par 10 revient à chercher combien il y a de dizaines dans 340. La référence à l'écrit constitue ici une aide importante, l'énoncé du résultat nécessitant un sectionnement par tranches de trois chiffres : pour 530 × 10, on passe ainsi de « cinq cent trente » à « cinq mille trois cents » (5 300).
■ Calculer des produits du type 30 × 4, 400 × 8, 20 × 30 et les quotients correspondants.	Il s'agit d'étendre la connaissance de la table de multiplication au calcul de produits et de quotients sur des dizaines ou des centaines entières.
■ Connaître et utiliser les relations entre des nombres « repères » : 100, 1 000 et 60 et leurs diviseurs.	Ces relations sont liées à l'utilisation des expressions « moitié, double, quart, quadruple, tiers, triple ». L'objectif est que les élèves aient mémorisé le fait que 25 est le quart de 100, la moitié de 50, le tiers de 75…
■ *Multiplier et diviser par 10, 100… dans l'ensemble des nombres décimaux.*	Cette compétence se situe à la frontière entre calcul automatisé et calcul réfléchi, dans la mesure où il est important de profiter de ce travail pour faire prendre conscience aux élèves que multiplier 3,5 par 100 revient à transformer les unités en centaines, les dixièmes en dizaines, les centièmes en unités : la réponse 350 n'est pas seulement le résultat de l'application d'une règle, mais doit être liée à une compréhension qui enrichit la connaissance des écritures à virgule.
■ Connaître les relations entre certains nombres décimaux, comme 0,25, 0,5, 0,75 et 1 ou 2,5, 5, 7,5 et 10.	Cette connaissance est à relier à celle évoquée ci-dessus sur les relations entre diviseurs de 100 ou de 1 000.

Calcul réfléchi

Comme pour le domaine additif, la frontière entre calcul automatisé et calcul réfléchi n'est pas toujours facile à préciser. À un même moment, elle peut varier d'un élève à l'autre et, surtout, elle se modifie au cours du cycle. Ainsi, certains calculs placés dans la rubrique précédente sont d'abord traités par les élèves à l'aide d'un raisonnement avant d'être automatisés. Il ne faut pas oublier que l'automatisation est le résultat d'un travail qui allie compréhension, raisonnement, explications et entraînement, ce dernier n'étant pas le seul élément de la mise en mémoire de résultats ou de procédures.

Il faut souligner trois points importants :

– la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celle qui est donnée ici peut donc être adaptée par les enseignants ;

– les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu ;

– l'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorisent les progrès des élèves.

C'est dans le calcul multiplicatif (multiplication, division) que le calcul approché revêt le plus d'importance. Mais c'est là aussi qu'il présente les plus grandes difficulté et offre les meilleures occasions de discussion, selon que l'on privilégie la rapidité ou la précision (voir exemple dans le tableau ci-dessous).

Compétences	Commentaires
■ *Calculer les doubles, moitiés des nombres entiers inférieurs à 100 (résultats entiers)* ou de nombres plus grands, lorsque le calcul reste simple. ■ Calculer les *quadruples et quarts des nombres entiers inférieurs à 100 (résultats entiers)* ou de nombres plus grands, lorsque le calcul reste simple.	L'appui sur les doubles et les moitiés ainsi que sur les doubles des doubles (quadruples) ou les moitiés des moitiés (quarts) constitue un point d'appui intéressant. Les élèves doivent être capables, par exemple, de trouver la moitié de 240, de 360 ou de 900 et de déterminer le quart de 120 ou de 600. À la fin du cycle 3, cette compétence est étendue au calcul des moitiés de nombres impairs (la moitié de 19 est 9,5, celle de 73 est 36,5…) et à celui des doubles nombres comme 7,5 ou 45,5…
■ *Multiplier* et diviser par 5, par 20, par 50.	Pour certains de ces calculs, il peut être intéressant de considérer par exemple 5 comme la moitié de 10 ou 50 comme la moitié de 100, sans pour autant imposer des règles systématiques de calcul.
■ Multiplier un nombre par des nombres comme 11, 12, 9, 19, 21, 15, 25…	Il est impossible de donner une liste exhaustive des calculs qui peuvent être proposés. Dans tous les cas, on insistera sur la variété des procédures qui peuvent être utilisées et qui, généralement, s'appuient sur une décomposition des nombres. Ainsi, 15 × 16 peut être calculé : – en ajoutant les résultats de 15 × 10 et de 15 × 6 ; – en ajoutant les résultats de 15 × 10 et de 5 × 16 ; – en calculant 15 × 4, puis en multipliant le résultat par 4 ; – en multipliant 16 par 30 et en divisant le résultat par 2…
■ Décomposer un nombre sous forme de produits de deux ou plusieurs facteurs.	Il s'agit ici de dépasser les seules décompositions liées à la connaissance des tables. Par exemple, 64, c'est 8 × 8, mais aussi 32 × 2 ou 16 × 4…, 72, c'est 9 × 8, mais aussi 24 × 3… Cette compétence sera très utile aux élèves lorsqu'ils auront, au collège, à simplifier des fractions ou chercher des factorisations.
■ Calculer mentalement un quotient et un reste entiers dans des cas simples de division d'un nombre entier par un nombre entier.	Les élèves doivent, par exemple, être capables d'effectuer mentalement la division de 230 par 7, en décomposant 230 en 210 + 20 ou en 140 + 70 + 14 + 6.

Compétences	Commentaires
■ Évaluer l'ordre de grandeur d'un produit ou d'un quotient (sur les nombres entiers) par un calcul approché.	Si on souhaite une valeur approchée du résultat de 123 × 12, on peut se limiter au calcul de 100 × 10 qui fournit un ordre de grandeur acceptable (et obtenu rapidement) ou calculer 120 × 12 si on cherche une meilleure approximation. Le calcul de 100 × 15 aurait pu concilier les deux impératifs. Le travail porte aussi bien sur des tâches où il faut chercher une valeur approchée du résultat que sur des tâches, plus simples, où il faut choisir parmi plusieurs estimations. Exemple pour la multiplication : parmi les nombres suivants, quel est le plus proche de 725 × 37 ? 2 680, 27 000, 16 000 ou 200 000 ? Exemple pour la division : parmi les nombres suivants, quel est le plus proche du quotient entier de 6 052 divisé par 17 ? 36, 98 ou 356 ?
■ Utiliser la connaissance des tables pour calculer des produits simples d'un nombre décimal par un nombre entier.	On se limite, au cycle 3, à des questions du type : 0,8 × 7, 0,6 × 5… ou du type 1,2 × 3 et 1,2 × 6, en mettant en évidence les connaissances sur les écritures à virgule nécessaires pour traiter ce type de calculs : 1,2 × 6, c'est 6 unités et 12 dixièmes ; or 10 dixièmes, c'est 1 unité ; le résultat est donc 7 unités et 2 dixièmes (7,2).

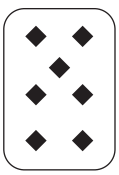
Exemples d'activités et de supports

En dehors des occasions dans lesquelles le calcul mental est utilisé de manière fonctionnelle et des activités quotidiennes qui lui sont consacrées, divers supports peuvent être mobilisés pour en motiver la pratique : jeux de cartes, dominos, lotos, jeux de stratégie, logiciels… Quelques exemples sont fournis ici à titre indicatif et la bibliographie fournit de nombreuses références dans lesquelles l'enseignant trouvera des idées d'activités à pratiquer collectivement ou en atelier.
Le premier exemple montre comment il est possible de travailler une même compétence à travers une grande variété d'activités. Les exemples suivants visent à élargir la gamme des activités possibles.

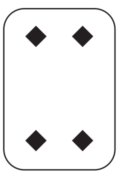
Jeux pour travailler les compléments à la dizaine (cycle 2)

Complément à 10

Un jeu de cartes ordinaires (sans les figures) est battu. L'enseignant propose une carte à un enfant qui doit énoncer rapidement le complément à 10.



→ réponse : « trois »



→ réponse : « six »

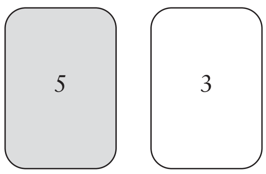
Cartes recto-verso : compléments à 10

Un jeu de six cartes portant au recto l'écriture d'un nombre de 0 à 5, au verso son complément à 10. La face d'une carte est montrée. Il faut déterminer ce qui est écrit sur l'autre face.
Exemple de carte :

recto verso

Complément à la dizaine supérieure

Dans un jeu de cartes, on tire une carte grisée qui indique les dizaines et une carte blanche qui indique les unités. L'élève doit indiquer la dizaine immédiatement supérieure et le complément à cette dizaine.

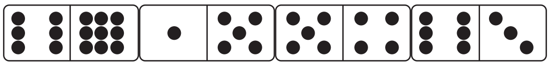


→ réponse : « soixante », « sept pour aller à soixante »

Bon débarras

Le jeu se joue à deux, avec des cartes marquées de 1 à 9 (écritures chiffrées ou constellations) en quatre exemplaires. Chaque joueur reçoit dix cartes, le reste étant mis au talon, dos visible. Un joueur tire une carte du talon. L'autre doit abattre le complément à 10, pris parmi ses cartes. S'il ne peut jouer, il passe. Le vainqueur est celui qui s'est débarrassé de toutes ses cartes.

Dominos « compléments à 10 » ou « compléments à 20 »



15	17	3	8	12	10	10	5

Autres jeux et supports possibles

Tableaux de nombres

– Barrer les paires de nombres dont la somme est 10. Quel nombre reste-t-il ? (Cycle 2.)

5	8	3
2	7	4
6	4	5

– Barrer les paires de nombres dont la somme est 7. Quel nombre reste-t-il ? (Cycle 3.)

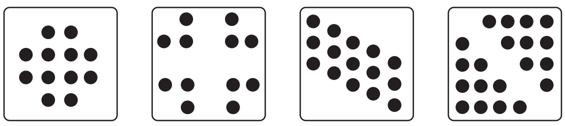
14	2	13
11	20	8
15	4	9

– Barrer les paires de nombres dont la somme est 60. Quel nombre reste-t-il ? (Cycle 2.)

30	12	20
4	3	15
6	2	5

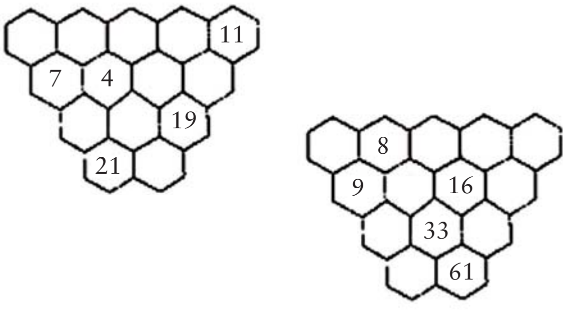
Combien ?

Une carte est présentée rapidement (trois ou quatre secondes au cycle 2, deux ou trois secondes au cycle 3). Combien de points compte-on ? Il s'agit ici de « stratégie perceptive » ; ainsi sur la première carte on peut décomposer en 2 + 4 + 4, puis faire appel à un calcul ; ou encore repérer (comme sur la deuxième carte) quatre constellations de 3, et poser 3 × 4 = 12.

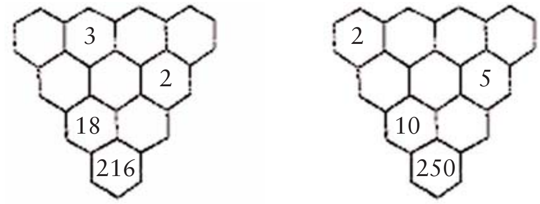


Cascades

– Additions. Chaque case contient la somme des nombres situés au-dessus d'elle. Il s'agit de trouver les nombres qui manquent dans les grilles ci-dessous.



– Multiplications. Le jeu est identique mais la règle est multiplicative. Chaque case contient le produit des nombres situés au-dessus.



Tables incomplètes

Les tableaux ci-dessous sont extraits de la table de Pythagore. Mais les lignes et les colonnes ne sont pas nécessairement ordonnées.

×		6		4
	6		33	12
				4
7			77	
		12		

×		4		
		12		
	24		0	
				49
	10			

×				
				8
9			108	36
	55	35		
			72	

Avec un jeu de cartes

– Total (cycle 2) : deux joueurs. On conserve les cartes de 1 à 10. Chaque joueur reçoit dix cartes. Le reste est au talon, dos visible. Un joueur tire deux cartes du talon. L'autre doit abattre le même nombre, avec une ou deux cartes. S'il ne peut pas jouer, il passe. Le vainqueur est celui qui s'est débarrassé de toutes ses cartes.

– Jeu de l'oie (cycle 2) : deux joueurs ou davantage. On conserve les cartes de 1 à 7 noires, de 3 à 10 rouges. Les cartes sont en pile, dos visible (placer les deux 10 rouges en haut de la pile). Chaque joueur tire une carte et augmente du nombre tiré si la carte est rouge, diminue du nombre tiré si elle est noire. Énoncer le score à chaque étape. Le jeu s'arrête quand la pile est épuisée.

– Le compte est bon (cycle 3) : deux joueurs ou davantage. On garde les cartes de 1 à 10. Tirer deux cartes : elles donnent la cible (par exemple 7 et 3 → 73, 10 et 1 → 101), puis cinq autres cartes. Il s'agit de les combiner avec les signes +, –, × pour obtenir la cible ou s'en approcher le plus possible. Le résumé de la suite des calculs effectués peut être donnée par des calculs successifs ou, dans les cas simples, par une écriture parenthésée.

Computix (Pascal Pluchon)

Deux joueurs, A et B. A joue sur les lignes horizontales, B sur les verticales. On part de la case centrale.

5	1	2	6	1
9	3	9	10	7
8	4	5	8	10
7	9	3	7	7
7	6	3	6	3

3	10	3	3	4
1	2	5	3	3
3	7	6	2	4
10	3	2	10	6
2	9	1	10	6

9	8	8	10	2
4	7	8	10	3
8	6	9	1	8
1	10	5	8	4
1	2	10	4	6

Le joueur A choisit sur cette ligne une case dont le contenu augmente son total et efface le contenu de la case. Le joueur B doit choisir une case dans la verticale de la précédente ; il augmente ainsi son total et efface le contenu de la case, etc. Si l'un des joueurs est empêché de jouer, il passe son tour. Lorsque la grille est vide ou bien s'il est impossible de jouer, celui qui a le plus de points a gagné.

Le quinze vainc (Martin Gardner) (cycle 3)

Deux joueurs. On utilise une piste de neuf cases, trois jetons blancs, trois jetons noirs.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Chaque joueur, à tour de rôle, pose un de ses pions sur une case libre. Le but est de totaliser 15 en additionnant les nombres associés à ses trois pions. Si personne n'a gagné lorsque les six pions sont posés, chaque joueur, à tour de rôle, déplace un de ses pions vers une case libre, jusqu'à ce que l'un des joueurs obtienne 15.

Dans le chapitre « Utiliser les calculatrices en classe », page 63, d'autres activités sont proposées dans lesquelles la calculatrice sert de support à des activités de calcul mental.

Des jeux du commerce (Fermer la boîte ou Shut the Box, Trio, Coogle, Triolet, Mathadot junior…) peuvent également être utilisés avec profit, par exemple dans un « coin mathématique » aménagé dans la classe.

Enfin, certains sites mathématiques sur Internet fournissent également des exemples d'activités.

Bibliographie

– APMEP, *Jeux*, n° 2, « Jeux et activités numériques », et *Jeux*, nos 5 et 6, « Des activités mathématiques pour la classe » (APMEP, 26, rue Duméril, 75013 Paris).
– Boule F., *Jeux de calcul*, Armand Colin, 1996.
– Boule F., *Performances et démarches de calcul mental au cycle 3*, thèse, Presses universitaires du Septentrion, 1997.
– Boule F., *Le Calcul mental à l'école*, IREM de Bourgogne, 1997-1998.
– Boule F., *Supports de calcul et jeux numériques à construire*, CNEFEI Suresnes, 1998.
– Butlen D. et al., *Calcul mental, calcul rapide*, IREM de Paris VII, 1987.
– Condorcet, *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité* (posth. 1799), Art, culture, lecture Éditions, 1989.
– Ermel, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, 5 volumes, du CP au CM2, Hatier.
– Fayol M., *L'Enfant et le Nombre*, Delachaux & Niestlé, 1990.
– Kuntzmann J., *Calcul mental de 10 à 90 ans*, IREM de Grenoble, 1987.
– Lethielleux C., *Le Calcul mental* (2 vol.), Armand Colin, 1992-1993.
– Peltier M.-L., *Activités de calcul mental*, Hatier, 2000.

Le calcul posé à l'école élémentaire

Cette fiche d'accompagnement a pour objet de préciser la place et les objectifs de l'apprentissage des algorithmes de calcul posé (souvent désignés par l'expression « techniques opératoires »).
Pour les considérations générales relatives aux enjeux de l'enseignement du calcul à l'école primaire, on peut se reporter à l'introduction du document d'application (paragraphe « La question du calcul aujourd'hui »). La place respective des différents moyens de calcul y est précisée : calcul mental, calcul instrumenté et calcul posé.
Pour les apprentissages à développer aux cours des différents cycles, les informations sont apportées dans les parties suivantes du texte des programmes et du document d'application.
Ces différents textes insistent sur le fait qu'aujourd'hui l'apprentissage des techniques de calcul posé ne se justifie plus par leur utilisation effective dans la société, mais doit être centré sur deux objectifs essentiels :
– une maîtrise de ces techniques, dans des cas simples, permet aux individus de mieux apprécier l'efficacité des instruments qu'ils utilisent ;
– un travail visant à la construction, à l'analyse et à l'appropriation de ces techniques conduit à utiliser et combiner de nombreuses propriétés relatives au système d'écriture des nombres (numération décimale de position) et aux opérations en jeu ; en retour, ce travail assure une meilleure maîtrise de ces propriétés.
En résumé, l'étude des techniques de calcul posé doit être résolument orientée vers la compréhension et la justification de leur fonctionnement. Elle ne peut donc, en aucun cas, se limiter à l'apprentissage de récitatifs.
Généralement, les calculs sont proposés en ligne, le choix de les effectuer en ligne ou posés « en étages » revenant à l'élève.
Enfin, dans tous les cas, l'élève doit être incité et entraîné à utiliser des moyens de contrôle des résultats obtenus (comme dans le cas du calcul instrumenté) : recherche d'un ordre de grandeur du résultat, contrôle du chiffre des unités, vérification par une addition dans le cas de la soustraction ou par celle de l'égalité $a = bq + r$ dans le cas de la division.
Dans ce document, les techniques relatives à chaque opération sont examinées. Les acquis préalables nécessaires à leur étude sont précisés et quelques étapes pour leur enseignement sont proposées.

	Programme : objectifs et contenus	**Programme : compétences**	**Document d'application**
Cycle des apprentissages fondamentaux	Calcul (§ 3). Calcul (§ 4).	Calcul automatisé (§ 3.1).	Introduction : la question du calcul aujourd'hui (p. 6). Résultats mémorisés, procédures automatisées (p. 21) : commentaire relatif aux compétences attendues.
Cycle des approfondissements		Résultats mémorisés, procédures automatisées (§ 4.1).	Introduction : la question du calcul aujourd'hui (p. 6). Résultats mémorisés, procédures automatisées (p. 25) : commentaire relatif aux compétences attendues.

Addition posée

La technique de l'addition est la plus simple à mettre en place. Sa compréhension repose en effet sur celle du principe fondamental de la numération décimale (égalité entre dix unités et une dizaine…) et la rapidité de son exécution dépend de la connaissance des sommes de nombres à un chiffre (tables d'addition).
Cependant, à l'entrée au CE2 (résultats de l'évaluation 2002), elle n'est maîtrisée que par trois élèves sur quatre dans le cas d'une addition de deux nombres avec retenues (calcul de 346 + 184, proposé en colonnes) et par à peine plus de la moitié des élèves dans le cas où l'addition comporte trois nombres (calcul de 238 + 159 + 374, proposé en colonnes).

À l'entrée en sixième, dans le cas où des nombres décimaux sont en jeu, près d'un élève sur cinq est encore en difficulté face à des additions comme 8,32 + 15,87 ou 15,672 + 352,21 (données en ligne). Les erreurs relevées ont trois origines possibles : maîtrise insuffisante des tables, mauvaise gestion des retenues, disposition « en étages » ne respectant pas l'alignement des chiffres de même valeur. Cette dernière difficulté apparaît plus fréquemment dans le cas des nombres décimaux, ce qui témoigne d'une compréhension insuffisante des écritures à virgule.

Addition des nombres entiers

Le calcul posé en colonnes n'a d'intérêt que pour les nombres d'au moins deux chiffres et même dans ce cas, le calcul à partir de l'écriture en ligne en repérant le rang de chaque chiffre est aussi efficace et rapide que le calcul posé « en étages ».
Il est important de ne pas dissocier dans le temps l'étude des cas « sans retenue » et des cas « avec retenue », afin de ne pas générer l'idée que le calcul se limite à l'addition séparée des chiffres de même valeur.
Deux acquisitions doivent précéder cet apprentissage :
– la compréhension du principe de groupements par dix qui sous-tend la numération décimale de position, et notamment l'égalité entre dix unités et une dizaine ;
– une efficacité dans le calcul des sommes de deux nombres inférieurs à dix : il ne s'agit pas d'attendre que tous les résultats des tables soient disponibles instantanément, mais il est indispensable qu'ils puissent être produits assez rapidement pour ne pas entraver la réflexion sur la gestion des retenues.
De plus, pour le calcul de sommes de plusieurs nombres, les élèves doivent être capables de calculer rapidement des sommes dont un des termes est un nombre à deux ou trois chiffres et l'autre un nombre à un chiffre.
En fonction de ces considérations, le travail sur la technique posée ne peut pas intervenir prématurément. Il se situe plutôt en dernière année de cycle 2, même si une première approche peut en être faite en fin de cours préparatoire.
Le recours à un ou plusieurs « matériels de numération » permet d'illustrer utilement la technique, et donc de mieux la comprendre, notamment par la correspondance établie entre retenues et groupements pas dizaines, centaines…
Il est important de proposer également des additions de plus de deux nombres que les élèves doivent calculer en une seule fois.

Addition des nombres décimaux

Dès qu'une première compréhension de l'écriture à virgule des nombres décimaux est en place, le travail sur la technique posée de l'addition de deux ou plusieurs nombres décimaux peut être envisagé. Axé sur la justification de la technique, il est d'ailleurs de nature à renforcer la maîtrise de la valeur attribuée à chaque chiffre en fonction de sa position dans l'écriture décimale et de celle des égalités du type 10 centièmes, c'est 1 dixième ou 10 dixièmes, c'est 1 unité… Ainsi, le calcul de 37,4 + 6,85 nécessite d'abord de comprendre que le premier nombre ne comporte pas de chiffre des centièmes, puis que l'addition de 4 dixièmes et de 8 dixièmes donne 12 dixièmes : 10 dixièmes formant une unité (en retenue), il y a donc 2 comme chiffre des dixièmes dans le résultat. Le tableau de numération peut constituer un référent utile, à condition que son utilisation ne devienne pas systématique. Les élèves doivent prendre conscience du fait que cette technique est identique à celle utilisée pour les entiers, à condition de placer correctement les nombres à ajouter les uns par rapport aux autres (dans le calcul « en étages »).

Soustraction posée

L'apprentissage d'une technique usuelle de soustraction est plus difficile que celui de l'addition pour plusieurs raisons :
– il existe plusieurs techniques possibles dont les fondements ne reposent pas sur les mêmes principes ni, par conséquent, sur les mêmes connaissances ;
– les connaissances qui permettent de justifier ces techniques sont plus nombreuses et plus complexes que dans le cas de l'addition ;
– les différences ou les compléments élémentaires (relevant des tables) sont souvent moins disponibles que les sommes ;
– une difficulté supplémentaire apparaît dans le cas des nombres décimaux lorsque la partie décimale du premier terme comporte moins de chiffres que celle du second.
Ces différentes raisons justifient amplement que les programmes n'envisagent l'apprentissage systématique d'une technique dans le cas des nombres entiers qu'au cycle 3. Ceci n'implique pas, bien au contraire, que la soustraction ne soit pas étudiée dès le cycle 2 : elle est alors travaillée dans le cadre de la résolution de problèmes et dans celui du calcul mental (mémorisation de résultats, calcul réfléchi).
À l'entrée en sixième (résultats de l'évaluation 2001), le calcul d'une soustraction posée fait difficulté pour environ un élève sur cinq (1 285 – 625 et 937 – 46, données en ligne). L'erreur la plus fréquente reste celle qui consiste à soustraire pour chaque chiffre « le plus petit du plus grand ». Les taux de réussite sont assez voisins pour des soustractions avec des décimaux ayant des parties décimales de même longueur (19,78 – 2,42 et 20,14 – 8,82, données en ligne, la première étant évidemment mieux réussie que la seconde). Les échecs augmentent dans le cas des décimaux dont les parties décimales ne sont pas de même longueur : quatre élèves sur dix sont en

difficulté dans le calcul de 7,24 – 4,3 (donnée en ligne, la pose étant demandée explicitement).

Trois techniques pratiquées

Le choix de l'une de ces techniques par l'enseignant suppose une conscience claire des justifications qui sous-tendent chacune d'elles de façon à adapter les étapes de l'apprentissage. Le calcul s'effectue toujours de droite à gauche. Les trois techniques sont expliquées sur l'exemple : 753 – 85.

Technique reposant sur une autre écriture du premier terme

De 3 unités, on ne peut pas soustraire 5 unités.
On échange donc 1 dizaine contre 10 unités. On considère maintenant 4 dizaines et 13 unités. On peut alors soustraire 5 unités de 13 unités ; résultat : 8 unités.
Le même processus est repris pour soustraire 8 dizaines…

	6	14	
	~~7~~	~~5~~	13
–		8	5
	6	6	8

Cette technique est la plus simple à comprendre, car elle est fondée sur la seule connaissance des principes de la numération décimale, élaborée dès le CP. Elle est en vigueur dans certains pays, mais présente l'inconvénient de nombreuses surcharges pour des calculs du type 4 003 – 1 897.

Technique reposant l'équivalence entre soustraction et recherche de complément

Le calcul de 753 – 85 = … est équivalent à celui de 85 + … = 753.
C'est donc le calcul de cette addition lacunaire qui va être réalisé.
Le seul nombre à un chiffre qui, ajouté à 5, donne un résultat terminé par 3 est 8 (table d'addition) : 5 + 8 = 13. On retrouve le « 3 » des unités et il faut écrire « 1 » comme retenue au rang des dizaines.
L'addition lacunaire se poursuit au rang des dizaines : que faut-il ajouter à 9 (8 + 1) pour obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 5 ? Réponse : 6, car 9 + 6 = 15, avec retenue de « 1 » au rang des centaines…

	7	5	3	
–		8	5	
	1	1		+
	6	6	8	

Cette technique présente l'avantage de n'être qu'une adaptation d'une technique connue (celle de l'addition), mais elle nécessite la compréhension de l'équivalence entre soustraction et recherche de complément qui reste encore difficile au début du cycle 3 pour certains élèves.

Technique reposant sur l'invariance d'une différence par ajout simultané d'un même nombre aux deux termes de la soustraction

De 3 unités, on ne peut pas soustraire 5 unités.
On choisit d'ajouter 10 unités au premier terme et de considérer 13 unités. Pour ne pas changer la différence, il faut aussi ajouter 10 unités au deuxième nombre : on le fait sous la forme d'1 dizaine. Etc.
À signaler : il y a ajout simultané des 10 unités et de la dizaine (puis de 10 dizaines et d'une centaine). On ne peut donc pas parler de retenue.

	7	15	13
–		8	5
	1	1	
	6	6	8

Cette technique fait également appel aux équivalences liées à la numération décimale, entre 10 unités et 1 dizaine, etc. Elle semble être la plus utilisée en France. Pourtant, il s'agit la plus difficile, parce qu'elle repose sur une propriété que les élèves maîtrisent tardivement et qui peut être formalisée par : $a - b = (a + c) - (b + c)$; cette formalisation n'est évidemment pas à proposer aux élèves.

Soustraction des nombres entiers

Le choix de l'une des techniques conditionne les étapes de l'apprentissage, dans la mesure où les connaissances et les compétences préalables que doivent maîtriser les élèves varient d'une technique à l'autre. Les seules connaissances communes concernent les équivalences entre unités, dizaines, centaines… et une maîtrise suffisante des résultats des tables d'addition (compléments et différences).
Comme pour l'addition, il est important de ne pas dissocier dans le temps l'étude des cas « sans retenue » des cas « avec retenue », afin de ne pas générer l'idée qu'un traitement séparé des chiffres de même valeur suffit toujours.
Le choix d'une technique relève de l'équipe du cycle 3. Il est cependant possible que les élèves arrivent d'autres écoles avec des techniques différentes. Il importe alors de respecter ces techniques, de montrer qu'elles permettent d'obtenir le même résultat, voire de les exploiter en classe pour chercher à expliciter les propriétés sous-jacentes.
Si le choix se porte sur la première technique, la mise en place peut commencer plus tôt que pour les deux autres techniques qui nécessitent un travail préparatoire plus important et plus difficile.
Le recours à un ou plusieurs « matériels de numération » permet utilement d'illustrer la technique, et donc de mieux la comprendre, mais la réflexion sur les nombres et sur les propriétés mobilisées doit rester la préoccupation dominante.

N.B. – Au cycle 3, il est important de proposer en ligne des soustractions de plus de deux nombres, par exemple 125 – 17 – 25 – 56. Ce calcul ne peut se conclure en une seule étape (même « en étages ») et génère plusieurs procédures :
– soit trois calculs successifs de différences, ce qui s'écrit en mathématiques [(125 – 17) – 25] – 56 ;
– soit deux calculs seulement : une somme suivie d'une différence, ce qui s'écrit en mathématiques 125 – (17 + 25 + 56).
L'équivalence des deux procédures (et l'égalité des deux écritures) n'est pas immédiate et demande à être pointée, en sachant que la justification peut présenter des difficultés pour certains élèves.

Soustraction des nombres décimaux

Comme dans le cas de l'addition, le travail sur la technique posée de la soustraction de deux nombres décimaux peut être envisagé dès qu'une première compréhension de l'écriture à virgule des nombres décimaux est en place, travail toujours axé sur la justification de la technique. Une difficulté particulière apparaît pour le calcul de différences comme 703,2 – 87,56 : elle se traduit souvent par le fait que des élèves écrivent « 6 » au rang des centièmes dans le résultat. Pour conduire correctement le calcul, il est nécessaire de considérer que l'absence de chiffre des centièmes dans 703,2 peut aussi être traduite par la « présence » de 0 à partir de l'égalité 703,2 = 703,20. Le but visé est d'amener les élèves à prendre conscience que la soustraction des décimaux fonctionne comme celle des entiers, moyennant un alignement (en colonne) des chiffres des unités ; le tableau de numération peut constituer un référent utile, à condition qu'il ne devienne progressivement qu'évoqué.

Multiplication posée

De nombreuses techniques de calcul de produits ont été élaborées au cours des temps et, aujourd'hui encore, les techniques utilisées ne sont pas toujours identiques d'un pays à l'autre. L'étude de certaines d'entre elles peut d'ailleurs être conduite avec une visée culturelle et comme support à un travail sur les propriétés de la multiplication. Mais, seule la technique usuelle française doit être maîtrisée (et bien entendu comprise) par les élèves.
Actuellement, à l'entrée en sixième, les résultats sont très variables. En 2001, le calcul de 64 × 39 n'est réussi que par 54 % des élèves. En 2000, ceux de 45 × 19 et de 523 × 205 sont réussis par respectivement 67 % et 60 % des élèves. Et, contrairement à une idée répandue, l'analyse des réponses montre que les erreurs dues à une connaissance insuffisante des tables de multiplication sont nettement plus nombreuses que celles qui peuvent être attribuées à la maîtrise de la technique. Ce constat plaide une nouvelle fois pour un renforcement du travail dans le domaine du calcul mental.

Multiplication des nombres entiers

La compréhension de la technique usuelle de la multiplication nécessite la coordination de plusieurs types de connaissances :
– tables de multiplication ;
– numération décimale pour la gestion des retenues, dans les multiplications intermédiaires puis dans l'addition finale ;
– règle des 0 : passage du résultat de la multiplication d'un nombre par 3 à la multiplication de ce même nombre par 30, par 300… ;
– distributivité de la multiplication sur l'addition.
Certaines de ces connaissances commencent à être travaillées au cycle 2, mais la maîtrise nécessaire à la compréhension de la technique de la multiplication posée ne commence à être assurée qu'au cours de la première année du cycle 3.
Le cas de la technique de multiplication de nombres à deux ou trois chiffres… par un nombre à un chiffre est plus simple et sa maîtrise constitue un préalable à celle de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Elle repose sur les principes de la numération décimale et la connaissance des produits des nombres à un chiffre (les tables de multiplication) ainsi que sur la commutativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (27 × 6 = 7 × 6 + 20 × 6). Au cours d'une première étape, certains élèves peuvent être autorisés à utiliser un répertoire écrit de ces tables pour alléger la charge de travail. Cette technique peut être mise en relation avec le calcul de l'addition itérée (posée) d'un même nombre.
Le cas de la technique de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres intervient plus tard. Sa compréhension nécessite d'avoir assimilé l'utilisation de la « règle des 0 » et de la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 523 par 205 revient à multiplier 523 par 200 et par 5 et à additionner les deux résultats obtenus). Il est donc prudent d'attendre la fin de la première année ou la deuxième année du cycle 3.
Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l'écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer, comme dans l'exemple ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccc l}
 & & & 5 & 2 & 3 & \\
 & & \times & 2 & 0 & 5 & \\
\cline{4-6}
 & & 2 & 6 & 1 & 5 & \leftarrow 523 \times 5 \\
1 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & \leftarrow 523 \times 200 \\
\hline
1 & 0 & 7 & 2 & 1 & 5 &
\end{array}$$

Multiplication d'un décimal par un entier

Une explication possible de la technique tient au fait que, par exemple, le résultat de 157,23 × 45 peut être obtenu en calculant d'abord 15 723 × 45, puis en divisant le résultat par 100, car 157,23 c'est 15 723 divisé par 100. Le travail sur cette technique suppose donc une bonne compréhension des nombres décimaux (valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture à virgule), ainsi que celle de la multiplication et de la division par 10, 100…, dont on sait qu'elle est source de difficultés pour de nombreux élèves.
La mise en place de cette technique relève donc de la fin de cycle 3.

Division posée

Comme pour la multiplication, de nombreuses techniques ont été utilisées dans l'histoire et le sont encore, selon les pays. La technique usuelle française, telle qu'elle a été longtemps enseignée, est très dépouillée (pas de soustractions posées) et donc source de nombreuses erreurs. De plus, celles-ci sont difficiles à repérer puisque tous les calculs effectués n'ont pas donné lieu à une trace écrite. Par ailleurs, il s'agit d'un calcul « à risque », insécurisant, dans la mesure où un chiffre essayé au quotient n'est jamais absolument certain. C'est également le seul calcul où l'estimation intervient en cours de calcul, alors que, pour les autres opérations, elle intervient soit au début, soit à la fin comme instrument de prévision ou de contrôle.
Il faut également souligner le peu d'usage qui est actuellement fait de cette technique… et en tirer la conséquence : plus encore que pour les autres opérations, le travail doit être principalement orienté vers la compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul.
Il n'est alors pas étonnant que, à l'entrée en sixième, les résultats constatés soient l'objet d'une grande variabilité. Ainsi, en 1999, le calcul posé de la division de 72 par 3 est réussi par 75 % des élèves alors que celui de 2 782 par 26 ne l'est que par 44 % d'entre eux.

Division euclidienne de deux nombres entiers

Cette technique est la seule dont la connaissance est demandée à la fin de l'école primaire. Sa compréhension suppose de nombreuses connaissances préalables :
– maîtrise des deux « sens » de la division : « quelle est la valeur de chaque part ? » (diviser 2 782 par 26, revient à partager 2 782 en 26 parts égales et chercher la valeur d'une part), « combien de fois ? » (diviser 2 782 par 26, revient à chercher combien de fois 26 est contenu dans 2 782) ;
– maîtrise des tables de multiplication (ce qui englobe la recherche de « combien de fois 7 dans 59 ? », qui n'est pas directement dans la table de multiplication par 7) – voir, à ce sujet, le chapitre sur le calcul mental, page 32 ;
– capacité à prévoir le nombre de chiffres du quotient, par encadrement ou par partage d'une partie du dividende.
À partir de là, plusieurs étapes peuvent être envisagées. Un temps préalable suffisant doit être consacré au calcul réfléchi de quotients et de restes. En effet, ce type de calcul donne l'occasion aux élèves de mettre en œuvre, en acte, des compétences également sollicitées dans l'exécution de la technique opératoire. Ainsi, diviser mentalement 1 548 par 7 incite à décomposer 1 538 en 1 400 + 148, après avoir repéré que 1 400 est divisible par 7 (résultat : 200), puis 148 en 140 + 8 pour déterminer les deux autres composantes du quotient (20 et 1) et le reste (1). Le quotient s'obtient par addition des quotients partiels : 200 + 20 + 1 = 221.
La seconde étape vers la technique peut consister à effectuer des divisions par un nombre à un chiffre, avant de travailler sur des divisions plus complexes, tout en limitant le niveau de difficulté.
Dans toutes les circonstances, trois recommandations peuvent être faites :
– commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient (ce qui permet un premier moyen de contrôle sur le quotient) ;
– s'autoriser à poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du chiffre cherché dans le quotient (la production de la totalité de « la table du diviseur » ne doit pas être encouragée) ;
– encourager la pose effective des soustractions (sans interdire toutefois aux élèves qui le souhaitent de s'en dispenser).
L'exemple suivant montre ce qui peut être attendu en fin d'école primaire :

	7	8	0	5	2	7	
–	5	4			2	8	9
	2	4	0		c	d	u
–	2	1	6				
		2	4	5			
	–	2	4	3			
				2			

	2	7
×		9
2	4	3

	2	7
×		8
2	1	6

La technique « dépouillée » de la division n'est pas une compétence visée, ni à l'école primaire, ni au collège.

Utiliser les calculatrices en classe

Ce document a pour objet de fournir quelques pistes pour l'utilisation des calculatrices aux cycles 2 et 3, dans quatre directions, les calculatrices pouvant être utilisées :
– comme outil de calcul ;
– comme instrument dont on cherche à comprendre certaines fonctionnalités ;
– comme support à l'exploration de phénomènes numériques ;
– comme source de problèmes et d'exercices.

Pour les considérations générales relatives aux enjeux de l'enseignement du calcul à l'école primaire, on peut se reporter à l'introduction du document d'application (paragraphe « La question du calcul aujourd'hui »). La place respective des différents moyens de calcul y est précisée : calcul mental, calcul instrumenté et calcul écrit.

Pour les apprentissages à développer aux cours des différents cycles, on peut se reporter aux parties suivantes du texte des programmes et du document d'application.

Le travail avec les calculatrices à l'école primaire doit également tenir compte de l'utilisation qui en sera faite au collège. L'ouvrage *Qu'apprend-on au collège ?* fournit à ce sujet des indications qui sont en continuité avec les recommandations faites pour l'école primaire : « Le collégien doit avoir recours à la calculatrice de façon naturelle. Mais une utilisation pertinente n'est pas spontanée et relève d'un apprentissage organisé et encadré par le professeur. Les calculatrices permettent de multiplier les exemples et les tentatives, mais également d'élaborer une démarche pour résoudre un problème, en libérant momentanément les élèves des calculs à effectuer. Dans tous les cas, c'est une lecture critique des résultats obtenus qui est développée, en liaison avec le calcul mental. »

N.B. – Dans les suggestions qui suivent, plusieurs moments et usages différents de la calculatrice sont évoqués :
– une phase de familiarisation (« Introduction et choix de l'outil », page suivante) ou de meilleure connaissance de ses fonctionnalités, au cycle 3 (« La calculatrice et ses fonctionnalités », page 59) ;
– l'utilisation en vue d'alléger la charge de calcul dans un problème (dit classique) ou d'inciter à trouver tout de suite l'opération experte (par exemple dans les problèmes du domaine additif et soustractif, avec des « grands nombres » au cycle 2, voir « La calculatrice, outil de calcul », page 58) ;
– l'utilisation en vue de favoriser des investigations sur les nombres, de mettre en œuvre une démarche de type heuristique (« La calculatrice et ses fonctionnalités », page 59) ;
– l'utilisation en vue de proposer des moments de renforcement de compétences en cours d'étude (par exemple sur les compétences relatives à la maîtrise de l'écriture des nombres entiers ou décimaux, à la compréhension des opérations et à leur lien avec la numération décimale entière, aux compétences dans le domaine du calcul approché ou des ordres de grandeur, etc., voir « La calculatrice, outil pour explorer des phénomènes numériques », page 62).

Il est conseillé de lire l'ensemble du présent chapitre, certains aspects développés pour le cycle des apprentissages fondamentaux n'étant pas repris pour le cycle des approfondissements.

	Programme : objectifs et contenus	**Programme : compétences**	**Document d'application**
Cycle des apprentissages fondamentaux	Exploitation de données numériques (§ 1). Calcul (§ 3).	Calcul instrumenté (§ 3.3).	Calcul : introduction (§ 3). Calcul instrumenté : commentaire relatif aux compétences attendues (§ 3.3).
Cycle des approfondissements	Introduction du programme de mathématiques du cycle 3 : calcul (§ 4).	Calcul instrumenté (§ 4.3).	Calcul : introduction (§ 4). Calcul instrumenté : commentaire relatif aux compétences attendues (§ 4.3).

Introduction et choix de l'outil

Il n'est pas possible, actuellement, de recommander tel ou tel modèle de calculatrice dans la mesure où il n'existe pas de cahier des charges pour un type de calculatrice (une proposition dans ce sens est cependant faite en annexe). Il appartient donc à chacun de décider, en fonction des possibilités de l'école, si tous les élèves doivent disposer ou non du même modèle. La solution idéale consiste à doter la classe d'un stock de calculatrices (une par élève ou au moins une pour deux élèves). Dans tous les cas, les élèves deviennent rapidement habiles dans l'utilisation matérielle de la machine qui, de ce point de vue, ne pose donc pas de difficulté particulière. Cette maîtrise de l'outil est aidée par l'élaboration progressive d'un mode d'emploi de la calculatrice qu'ils utilisent (voir la proposition ci-dessous).
Deux stratégies d'utilisation sont possibles ; elles peuvent même être utilisées successivement dans la classe :
– les calculatrices ne sont mises à disposition des élèves que lorsque l'enseignant le juge pertinent ;
– les calculatrices sont en permanence à disposition des élèves, l'enseignant choisissant d'en interdire l'utilisation pour certaines activités.
Les activités envisagées ici peuvent être conduites avec des calculatrices ordinaires.

Mode d'emploi personnel

Ceci est une proposition de grille afin que chaque enfant puisse élaborer le mode d'emploi de la calculatrice qu'il utilise. Celui-ci sera gardé avec la calculatrice. L'élève y consignera ce qui correspond à sa machine.
Il peut être composé des éléments suivants.
1) Un dessin libre de la calculatrice.
2) Le plus grand nombre entier affichable sur l'écran (pour comprendre que la machine est limitée et que l'homme sait écrire des nombres beaucoup plus grands).
3) La liste des touches avec leur effet, en particulier :
– touche correction ou retour (en cas de double affichage) ;
– mémoire fonctionnelle ou mémoire non fonctionnelle ;
– existence d'un opérateur constant implicite ou explicite ;
– priorité opératoire ou non ;
– racine carrée si elle existe : nous apprendrons à nous en servir plus tard ;
– etc.
4) Quelques exemples de calcul liés à la machine. Pour calculer une expression avec deux signes opératoires différents $25+17 \times 12$, je l'écris d'abord avec des parenthèses $25 + (17 \times 12)$.
– Si ma machine a la priorité, je peux taper 25 [+] 17 [×] 12.

Cycle des apprentissages fondamentaux

En fonction de sa progression et de ses choix didactiques, l'enseignant peut choisir différentes opportunités pour l'introduction des calculatrices dans la classe, au cours de la deuxième année du cycle. Voici quelques possibilités :
– introduction au moment où est présenté le premier signe opératoire pour montrer la compatibilité entre écriture proposée (par exemple $4 + 3 = 7$) et codage des touches frappées ;
– introduction à un moment où on souhaite étudier un phénomène numérique (par exemple, pour observer la génération d'une suite de nombres à l'aide de la séquence de touche [+] 1 [=] ;
– introduction au moment où un élève apporte de lui-même une calculatrice à l'école…
Une exploration libre peut être envisagée dans un premier temps. Elle permet aux élèves de savoir mettre en route et arrêter la machine, de repérer ce qu'ils reconnaissent (touches, affichage…) et d'être informés qu'ils ont toute l'école primaire pour apprendre à bien se servir de cet outil (selon les calculatrices disponibles dans la classe, on peut même préciser que certaines touches ne seront utilisées que plus tard, après l'école primaire). Cette exploration libre peut par exemple trouver sa place dans une ou deux séances de découverte au cours desquelles les élèves sont conduits à :
– repérer les touches lettres, chiffres et signes ;
– repérer que la mise en route de la calculatrice provoque l'affichage de 0 ;
– remarquer que lorsqu'on tape, par exemple, 436, on voit, à l'affichage, le 4 se décaler vers la gauche pour laisser la place qu'il occupait au 3 puis au 6.
Quelques exercices simples peuvent très rapidement être proposés pour compléter cette première prise de contact, par exemple :

Je tape sur la touche	Je vois sur l'écran (par exemple)	Commentaire possible
On	0.	« On » allume la calculatrice.
4	4.	
5	45.	
6	456.	
CE/C	0.	« CE/C » efface ce qui est affiché et écrit 0.

La calculatrice allumée affiche toujours quelque chose : 0.

Je tape sur la touche	Je vois sur l'écran (par exemple)	Commentaire possible
5	5.	
+	5.	
3	3.	
=	8.	La calculatrice calcule !

– Faire afficher le plus grand nombre que l'on connaît de un chiffre, de deux chiffres, de trois chiffres ;
– idem avec le plus petit entier de un chiffre, de deux chiffres… ;
– faire taper 5 [+] 3 [=], observer les affichages successifs et constater que le résultat apparaît après l'appui sur la touche [=] (ou après la touche [+] ou une autre touche d'opération).

Ainsi les signes de la calculatrice n'ont pas exactement les mêmes significations que les signes mathématiques correspondants. Par exemple le signe [=] n'est pas symétrique : 4 + 3 = 7 et 7 = 4 + 3 sont deux écriture mathématiques équivalentes ; la machine affiche 7 quand on tape 4 [+] 3 [=], mais toujours 7 si on tape 7 [=]. Autre exemple : le signe [+] peut remplacer le signe [=] à l'intérieur d'une suite de calculs, puisque le résultat intermédiaire peut s'afficher.

Il est important de décider avec les élèves d'un codage de ce qu'on tape : ainsi le = tapé ne s'écrira pas comme le = mathématique. Il sera par exemple entouré : [=]. Il en va de même pour tous les symboles opératoires tapés.

Très rapidement, peuvent être proposées des activités dans lesquelles la calculatrice est un outil pour travailler des notions en cours d'apprentissage ou pour entraîner des notions étudiées antérieurement (se reporter à « La calculatrice et ses fonctionnalités », page 59, et à « Explorer des phénomènes numériques », page 62).

Cycle des approfondissements

Au cycle 3, la calculatrice doit devenir un outil de calcul banalisé. La meilleure solution consiste donc à la mettre à la disposition des élèves dès le début de l'année scolaire, au même titre que tous les autres instruments, après lui avoir consacré une séance de familiarisation.

Dans certaines circonstances, lorsque les apprentissages visés le nécessitent, l'enseignant en interdit l'usage (par exemple, pour mettre en place une technique écrite de calcul).

Comme cela est expliqué plus loin, certaines fonctionnalités des calculatrices utilisées par les élèves font l'objet d'un apprentissage spécifique. En particulier, un travail doit être fait à propos de la division (voir les paragraphes consacrés à l'exploration de phénomènes numériques et à l'étude des fonctionnalités de la calculatrice).

Choisir une calculatrice adaptée pour l'école primaire

Une calculatrice pour l'école primaire doit :
– comporter un écran de deux lignes d'affichage permettant d'éditer et de corriger une séquence de calcul et d'afficher le résultat sans avoir à ressaisir la séquence de calcul ;
– ne pas proposer la notation exponentielle (c'est-à-dire que si l'affichage comporte huit chiffres, elle ne peut pas afficher de nombre supérieur à 99 999 999) ;
– en plus des touches usuelles (chiffres, quatre opérations, signe pour l'obtention du résultat), comporter des touches parenthèses et une touche pour la division euclidienne permettant d'obtenir l'affichage du quotient et du reste entiers ;
– ne pas comporter de touches [%], ni de touche de changement de signe [±] ;
– permettre de stocker un résultat partiel ;
– offrir la possibilité de définir, mémoriser et rappeler un opérateur constant, à l'aide d'une touche spécifique ;
– effectuer les calculs en respectant les priorités opératoires habituelles.

La calculatrice, outil de calcul

La calculatrice est d'abord un outil de calcul, largement utilisé dans la société actuelle. Elle est reconnue ainsi par les élèves dès le cycle 2. Son usage intervient alors essentiellement dans le cadre de la résolution de problèmes.

Cycle des apprentissages fondamentaux

Il convient de bien cerner les circonstances dans lesquelles la calculatrice peut être utilisée avec profit et donc aussi celles dans lesquelles son usage n'est pas compatible avec les apprentissages visés.

Cas où l'usage de la calculatrice est une aide pour les élèves

Dès le cycle 2, pour certains types de problèmes, c'est la reconnaissance directe de l'opération pertinente qui est visée. Par exemple, vers la fin du cycle, un problème comme : « Combien y a-t-il de timbres dans un album de 15 pages, dans lequel on a collé 18 timbres sur chaque page ? », on attend que la majorité des élèves reconnaissent que la réponse peut être obtenue en calculant le produit de 15 par 18. Mais peu d'élèves sont, à ce moment-là, capables de réaliser par écrit (par un calcul réfléchi ou posé) un tel calcul sans erreur. La calculatrice est alors l'outil pertinent pour obtenir un résultat (ici 15 × 18 ou 18 × 15) qu'ils ne sont pas encore capables de trouver eux-mêmes. Son usage renforce même la reconnaissance du caractère multiplicatif du problème posé, dans la mesure où elle ne rend pas cette reconnaissance dépendante des capacités de calcul de l'élève.
Il appartient cependant à l'enseignant de distinguer les cas où la calculatrice peut être mise à disposition des élèves de ceux où son usage n'est pas nécessaire, notamment lorsqu'une résolution mentale est possible (par exemple avec un album de 4 pages de 10 timbres). Là encore, la situation peut varier d'un élève à l'autre pour certains calculs.

Cas où l'usage de la calculatrice doit être décidé avec prudence

Au cours d'une première étape des apprentissages numériques, les élèves résolvent la plupart des problèmes en ayant recours à des procédures personnelles, élaborées dans chaque situation proposée, sans qu'il y ait au préalable reconnaissance d'une procédure de résolution immédiate. L'élaboration de ces procédures s'appuie souvent sur différents moyens utilisés simultanément : dessin, dénombrement, comptage de tant en tant ou calculs successifs. Le recours à la calculatrice peut alors constituer une entrave au raisonnement de l'élève, dans la mesure où il incite à chercher un moyen d'obtenir immédiatement le résultat cherché.
Exemple : On se propose de distribuer équitablement 18 images à 3 enfants. Combien chaque enfant aura-t-il d'images ?
Certains élèves vont dessiner 18 images et 3 enfants et simuler une distribution.
D'autres vont dessiner 18 images et tenter de réaliser 3 paquets identiques.
D'autres vont dessiner 3 colonnes (chaque colonne étant associée à un enfant) et indiquer par des nombres les étapes d'une distribution un par un ou deux par deux :

2	2	2	**6**
2	2	2	**12**
1	1	1	**15**
1	1	1	**18**

D'autres peuvent choisir successivement des nombres qu'ils ajoutent trois fois pour essayer d'atteindre 18, par exemple avec un écrit du type : 4 / 4 / 4 → 12 ; 7 / 7 / 7 → 21 ; 6 / 6 / 6 → 18.
Au moment de la résolution, la calculatrice n'est d'aucune aide pour les deux premières procédures. Pour les deux suivantes, il n'est pas certain que l'élève ait reconnu que l'addition était pertinente (dans le denier cas, on voit certains enfants compter de 4 en 4 avec leurs doigts alors qu'ils connaissant l'égalité 4 + 4 = 8).
À un moment de l'apprentissage, la calculatrice peut devenir utile pour les deux dernières procédures, lorsque l'élève a reconnu que les calculs à effectuer relevaient de l'addition, notamment si le même type de problème est posé avec des nombres plus grands (par exemple 36 images à répartir entre 4 enfants).
Dans ce type d'activité, le rôle de l'enseignant est très important. En fonction de l'analyse qui vient d'être faite, il lui appartient de décider à quel moment et pour quels élèves l'usage de la calculatrice est pertinent.
Au moment de la vérification des réponses, c'est-à-dire au moment où, par exemple, on cherche à savoir si la réponse « 7 images par enfant » convient pour le problème proposé, la calculatrice peut devenir un outil qui permet de décider rapidement, après avoir reconnu que, pour vérifier, il suffit d'ajouter 4 fois le nombre 7.

Utiliser la calculatrice « à bon escient »

À chaque occasion, l'attention des élèves doit être attirée sur l'opportunité d'utiliser tel ou tel moyen de calcul, par exemple savoir choisir entre calcul mental et calcul avec la calculatrice.
Des activités plus spécifiques peuvent être proposées en complément de cette réflexion permanente sur le choix du moyen de calcul le plus approprié, par exemple à l'aide d'un exercice du type suivant :

Calcul	Utilises-tu		Résultat
	la calculatrice ?	le calcul mental ?	
8 + 2			
47 + 18			
8 – 1			
7 + 7 + 7 + 7 + 7			
50 – 20			
67 – 38			
200 + 200 + 200			
100 + 40 + 5			
47 × 13			

L'expérience montre que, très rapidement, les élèves interprètent ce type d'exercices comme un défi à calculer mentalement.

Cycle des approfondissements

Dans le prolongement du cycle 2, l'objectif essentiel est de rendre les élèves progressivement responsables du choix du moyen de calcul à utiliser dans telle ou telle circonstance, en particulier de faire le choix d'utiliser le calcul mental (exact ou approché) chaque fois que son usage permet de traiter la tâche proposée.

La calculatrice, outil de calcul dans la résolution de problèmes…

Trois pistes d'utilisation sont suggérées :
– la calculatrice est à la disposition de tous les élèves et ils en ont la libre utilisation pour obtenir des résultats, lorsque les calculs à réaliser ont été déterminés. C'est le cas, notamment, dans les problèmes « à étapes », chaque fois que la taille des nombres ne permet pas le recours au seul calcul mental ;
– la calculatrice est un outil de différenciation, mise à disposition des élèves qui ont des difficultés pour effectuer par eux-mêmes les calculs nécessaires. Elle peut leur éviter « la peur du calcul » qui freine leur raisonnement ou leur en fait perdre le fil et, même, pour certains, provoque le refus d'écrire un calcul qu'ils savent pertinent, mais qu'ils n'osent pas écrire parce qu'ils ne savent pas le mener à son terme ;
– la calculatrice est un outil d'investigation ; par exemple, dans un problème comme « Existe-t-il trois nombres qui se suivent et dont la somme est égale à 771 ? », son usage facilite le recours à une procédure par essais et ajustements.

… mais dont l'utilisation nécessite un véritable apprentissage

La calculatrice n'est pas l'outil miracle qui résout toutes les difficultés. Si son utilisation pour résoudre des problèmes ne fait pas l'objet d'un apprentissage explicite, elle peut même être à la source de nouvelles difficultés. Il est en effet nécessaire de conduire un travail avec les élèves dans au moins cinq directions :
– la nécessité de choisir le mode de calcul le plus approprié dans une situation donnée : calcul réfléchi, recours à une technique opératoire ou calcul instrumenté ; chaque fois que le calcul réfléchi est possible, il faut renoncer à la calculatrice qui n'est pas toujours l'outil le plus rapide ou le plus performant ;
– la nécessité de planifier et d'organiser, autant que possible, la suite des calculs à effectuer, c'est-à-dire d'anticiper au moins une partie de ces calculs (d'autres pourront apparaître nécessaires en cours de route) et de les préparer de façon claire sur une feuille ;
– la nécessité de noter au fur et à mesure les calculs réalisés et les résultats obtenus, ainsi que leur interprétation dans le contexte de la situation évoquée ;
– la nécessité de contrôler les résultats obtenus (par un calcul approché, par un contrôle sur le chiffre des unités ou le nombre de décimales…) et de se méfier des erreurs de frappe ;
– la nécessité, dans le cas des nombres décimaux ou de la division, de ne prendre en compte que la partie significative de l'affichage (voir les deux parties ci-après).
Autrement dit, il s'agit de travailler au bon usage simultané de la calculatrice et de la feuille de papier.

La calculatrice et ses fonctionnalités

Au cycle 2, on ne cherche pas à comprendre le fonctionnement de la calculatrice au-delà de son usage pour effectuer des calculs simples. À ce moment de la scolarité, seules sont utilisées les touches « marche/arrêt » et « chiffres » et celles relatives aux opérations connues et au signe d'égalité.
Au cycle 3, il est en revanche nécessaire de mieux connaître les ressources de la machine en vue d'une utilisation plus complète. Plusieurs fonctionnalités peuvent alors être étudiées avec les élèves.

Mise en marche, gestion de l'affichage

On peut s'intéresser au système « marche/arrêt » qui varie d'une machine à l'autre : touches séparées ou non, voire absence de touche « arrêt » sur certaines calculatrices solaires, touche unique ou touches séparées pour « mise en route » et « correction ». On peut également noter l'affichage de « 0 » lors d'une mise en marche ou d'une réinitialisation.

L'usage des touches « correction » et « réinitialisation/remise à zéro » permet également une meilleure utilisation de la machine.

Ces différentes fonctionnalités peuvent être mises en évidence par les élèves dans un travail d'exploration aboutissant à un début de mode d'emploi qui sera poursuivi avec d'autres fonctionnalités.

Il est également nécessaire de mettre en évidence les limitations de la machine, en particulier celles relatives au nombre de chiffres affichés.

Au moment de l'approche des nombres décimaux, il est également à noter que sur les calculatrices, la virgule est remplacée par un point.

Les touches « opérations »

C'est bien entendu la touche [÷] qui devra faire l'objet d'un travail particulier. Au départ, certains élèves pensent que son utilisation fournit le quotient entier (à gauche du point) et le reste (à droite du point). La comparaison avec des résultats obtenus mentalement, par un calcul écrit réfléchi ou en utilisant une technique opératoire permet de démentir cette hypothèse… tout en confirmant qu'on obtient bien le quotient entier en ne retenant que ce qui est affiché à gauche du point. Il est alors possible de poser la question de l'obtention du reste à l'aide de la calculatrice.

Il faudra attendre le moment où, par un calcul réfléchi « à la main », on cherche à poursuivre le calcul de la division en convertissant les unités en dixièmes, puis les dixièmes en centièmes… pour prendre conscience de la signification de la partie décimale. La calculatrice peut alors être utilisée pour obtenir des quotients décimaux exacts ou approchés, en étant vigilant sur le choix des chiffres qui ont une signification dans la situation étudiée.

Certaines calculatrices possèdent une fonction « division euclidienne » qui peut bien entendu être utilisée. Cette touche donne simultanément deux nombres résultats : le quotient et le reste entiers (alors que toute autre touche opératoire ne donne qu'un seul résultat).

Les priorités opératoires et les touches parenthèses

Soit à effectuer, avec la machine, les deux calculs suivants : A $\rightarrow 5 \times 2 + 6$ et B $\rightarrow 6 + 5 \times 2$. Si on tape dans l'ordre les éléments du calcul A, toutes les calculatrices affichent le résultat 16. Par contre, si on tape dans l'ordre les éléments du calcul B certaines calculatrices affichent le résultat 22 et d'autres affichent le résultat 16.

Pourtant, du point de vue mathématique, les deux expressions sont égales, en fonction de la règle conventionnelle de priorité opératoire[1] : en l'absence de parenthèses, la multiplication a priorité sur l'addition et la soustraction. Autrement dit, par convention mathématique : $5 \times 2 + 6 = (5 \times 2) + 6$ et $6 + 5 \times 2 = 6 + (5 \times 2)$.

La confrontation des deux résultats renvoyés par les machines est l'occasion pour le maître :

– de préciser la règle de priorité ci-dessus ;

– de préciser le type de calculatrice que possède l'élève : elle possède la priorité intégrée ou elle calcule de gauche à droite[2] et de faire noter cela dans le mode d'emploi ;

– de faire transformer la suite 6 [+] 5 [×] 2 pour obtenir le calcul effectif de $6 + 5 \times 2$, notamment en utilisant parenthèses ou mémoire.

Certaines calculatrices disposent en effet de touches [(] et [)] qui permettent de calculer directement des expressions comportant des parenthèses.

Les touches « mémoires »

Précisons tout d'abord qu'il existe deux types de mémoires :

– les mémoires fonctionnelles permettent d'opérer sur leur contenu (par exemple de procéder à des ajouts ou des retraits au contenu de la mémoire : c'est le cas pour la plupart des calculatrices ordinaires avec le touches [M+] ou [M–]) ;

– les mémoires non fonctionnelles qui permettent seulement de stocker un résultat qui peut être rappelé.

La question peut être posée de savoir calculer une expression de type $(254 \times 26) - (89 \times 57)$, avec une calculatrice qui ne respecte pas les priorités opératoires habituelles et qui ne comporte pas de touches « parenthèses » (ce sont souvent les mêmes !), mais qui possède une mémoire fonctionnelle.

Une initiation à l'utilisation des touches « mémoires » peut alors se révéler utile. Elle peut commencer par leur usage dans plusieurs situations du type suivant qui amène à inférer le fonctionnement des touches [M+], [M–], [RM] ou [MR]

1. De même qu'existe la règle suivante : un calcul entre parenthèses est prioritaire sur un calcul sans parenthèses.

2. Ce qui permet de relativiser la toute-puissance de la machine et sa soumission aux contraintes technologiques de construction.

Je tape	Je vois (par exemple)	Commentaire
10	10.	
M+	10.	
CE/C	0.	
RM	10.	RM rappelle le contenu de la mémoire : 10.
7	7.	
M+	7.	
CE/C	0.	
RM	17.	M+ additionne 7 à 10.
5	5.	
M+	5.	
CE/C	0.	
RM	22.	M+ additionne 5 à 17.

Cette expérience permet de conclure que [M+] additionne le contenu de ce qui est affiché à ce qui est déjà contenu de la mémoire. De même on découvre que [M–] soustrait le contenu de ce qui est affiché à ce qui est déjà contenu de la mémoire.
Des situations de type « bilan » avec recettes et dépenses sont ainsi susceptibles de plusieurs procédures à la calculatrice ; par exemple en utilisant [M+] et [M–] :

Recettes (en €)	345	215	56
Dépenses (en €)	123	58	245

En tapant successivement 345 [M+] 215 [M+] 56 [M+], on stocke la première recette, puis on lui additionne successivement la seconde puis la troisième. En appuyant sur [MR], on obtient le total des recettes. Puis, en tapant successivement 123 [M–] 58 [M–] 245 [M–], on retire les trois dépenses au contenu de la mémoire. En appuyant sur [MR], on obtient le bilan (ici l'excédent des recettes sur les dépenses).
La touche [MC] ou [CM] permet de vider le contenu de la mémoire, ce qui est indispensable avant tout nouveau calcul. Attention, pour effacer le contenu de la mémoire il faut parfois taper successivement deux fois sur la touche [RM].
Calculer l'expression (254 × 26) – (89 × 57), revient à taper [254] [×] [26] [=] [M+], puis (sans effacer le contenu de la mémoire) 89 [×] 57 [=] [M–], enfin [MR] pour demander l'affichage du résultat.
Au-delà d'un apprentissage de l'usage des touches « mémoires », c'est celui de la maîtrise des écritures de calculs avec ou sans parenthèses qui est visé.

Les touches « opérateurs constants »

Comme celui des touches « mémoires », cet apprentissage sera nécessairement guidé par l'enseignant. Les fonctionnalités des différentes machines sont extrêmement variables sur ce sujet. Certaines ne possèdent pas de fonctions « opérateurs constants », d'autres les possèdent de manière implicite (sans touches spécifiques), d'autres encore de façon explicite (existence d'une touche propre, [OP] par exemple).
Comment vérifier que la calculatrice a un opérateur constant implicite ?
Pour un opérateur constant additif, il suffit de taper 5 [+] 2 [=] [=] (touche [=] deux fois) :
– si la calculatrice affiche 7, elle n'a pas d'opérateur constant additif ;
– si elle affiche 9, le deuxième signe [=] signifie [+2] : elle a un opérateur constant additif à droite ;
– si elle affiche 12, le deuxième signe [=] signifie [+5] : elle a un opérateur constant additif à gauche.
Pour un opérateur constant multiplicatif, il suffit de taper 5 [×] 2 [=] [=] (touche [=] deux fois) :
– si la calculatrice affiche 10, elle n'a pas d'opérateur constant multiplicatif ;
– si elle affiche 20, le deuxième signe [=] signifie [×2] : elle a un opérateur constant multiplicatif à droite ;
– si elle affiche 50, le deuxième signe [=] signifie [×5] : elle a un opérateur constant multiplicatif à gauche.
La particularité de la machine est consignée sur le mode d'emploi.
Pour la multiplication, c'est en général le premier nombre tapé (celui de gauche) qui devient opérateur constant ; pour les trois autres opérations, c'est en général le deuxième (celui de droite).
Citons les utilisations possibles suivantes des opérateurs constants avec un calculatrice ordinaire (sans touche spécifique) :

Exemple 1

On veut chercher si 1 805 est un multiple de 13 ou entre quels multiples consécutifs de 13 il se situe.

En tapant 13 [×] 90 [=], on affiche 1 170. On souhaite essayer un nombre plus grand (par exemple 120), il suffit alors de taper 120 [=] pour obtenir le résultat (1 560). Puis la séquence 150 [=] donne pour résultat 1 950… et l'exploration se poursuit de cette manière. Tout se passe comme si la machine avait mémorisé la séquence 13 [×]. Elle en a fait un opérateur constant multiplicatif à gauche.

Exemple 2

On veut obtenir la suite des nombres de 101 en 101, à partir de 256 (voir également ci-dessous).
La séquence 256 [+] 101 [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=]… génère facilement pour une machine à opérateur constant additif à droite. La séquence [+] 101 est ici utilisée comme opérateur constant.

Exemple 3

Paul envoie une lettre à trois amis qui envoient eux-mêmes une lettre à trois amis différents. Ceci se répète sept fois. Combien de timbres seront nécessaires pour le dernier envoi ?
La séquence 3 [×] 3 [=] [=] [=] [=] [=] [=]… génère la réponse pour une machine à opérateur constant multiplicatif.

Explorer des phénomènes numériques

Par la facilité de calcul qu'elle offre, la calculatrice permet d'obtenir des résultats rapides et donc d'observer des phénomènes numériques, par exemple des régularités dans des suites de nombres générées avec son aide.

Cycle des apprentissages fondamentaux

L'observation de suites de nombres obtenues en appuyant plusieurs fois de suite sur la séquence de touches [+] 1 [=], à partir d'un nombre donné, permet de travailler sur la suite écrite des nombres de un en un, d'observer ou de prévoir et de contrôler les affichages successifs. Les jeunes élèves peuvent ainsi être mis en situation de faire des hypothèses sur les régularités et les changements qui se produisent et de vérifier ces hypothèses en poursuivant le processus. La mise en relation avec le fonctionnement d'un compteur permet d'enrichir ce travail.
Le même type d'étude peut être prolongé, avec d'autres séquences de touches, par exemple :
– la séquence [+] 10 [=] ou la séquence [+] 100 [=], à partir d'un nombre donné ;
– la séquence [+] 5 [=], à partir d'un nombre donné, fait apparaître un autre type de régularité ;
– la séquence [+] 2 [=], à partir de 0 ou de 1, permet de générer les nombres pairs ou impairs.

Cycle des approfondissements

Le même type de travail peut être repris au cycle 3, dans différents domaines. De plus, on peut recourir à la fonctionnalité « opérateur constant » proposée sur la plupart des calculatrices (voir « La calculatrice et ses fonctionnalités », page 59). Voici trois exemples, en lien avec le programme du cycle 3.

Les suites de nombres

Sur les nombres entiers, on peut, par exemple à partir de 2 049, avancer ou reculer de 101 en 101 (avec les séquences 2409 [+] 101 [=] 101 [+] 101 [+] 101 [+] 101 [+] 101… ou 2409 [+] 101 [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] si la machine a un opérateur constant additif à droite…).
Sur les nombres décimaux, on peut travailler sur des suites de 0,1 en 0,1, de 0,01 en 0,01 ou encore de 1,1 en 1,1…

Les multiples d'un nombre

De la même manière, on peut poser des problèmes ou vérifier une hypothèse (ici que 1 304 est un multiple de 4) en expérimentant avec la calculatrice, de deux façons :
– produire une suite de 4 en 4, à partir d'un multiple connu (par exemple, à partir de 1 000, en utilisant les séquences 1000 [+] 4 [=] [+] 4 [+] 4 [+] 4 ou 1000 [+] 4 [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] si la machine a un opérateur constant additif à droite …) ;
– essayer d'atteindre 1 304 par des produits dont le premier opérateur est toujours 4, en utilisant le fait que (sur une machine ordinaire) le premier opérateur est gardé comme opérateur constant ; on peut donc par exemple essayer : 4 [×] 300 [=], puis 350 [=], puis 320 [=]…

Les grands nombres

Que se passe-t-il si on coupe plusieurs fois de suite une feuille de papier en deux ? Combien de morceaux obtient-on ? Combien de fois faut-il la couper pour avoir plus de 10 000 morceaux ?
La séquence de touches 2 [×] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [=]… permet, sur une calculatrice ordinaire, de vérifier l'hypothèse qui a pu être émise par les élèves et, si on prolonge le processus, de voir la rapidité de croissance des nombres.
Ces exemples montrent que la calculatrice est davantage qu'un outil de calcul, un véritable moyen d'investigation sur les nombres. Son utilisation ne s'oppose alors pas à la réflexion de l'élève, bien au contraire !

La calculatrice, support d'exercices ou de problèmes

Non seulement, la calculatrice peut être utilisée pour résoudre des problèmes, mais elle peut l'être également pour en poser.

Cycle des apprentissages fondamentaux

Les quatre exemples suivants rendent compte des possibilités offertes par la calculatrice.

Numération : passer d'un nombre à un autre

Un premier nombre est affiché sur l'écran de la calculatrice (par exemple, 769). Sans éteindre la calculatrice, ni effacer le nombre affiché, il s'agit d'obtenir l'affichage de 789 en tapant le minimum de touches.
Pour répondre, l'élève doit remarquer que le chiffre des dizaines a « avancé de 2 » et qu'il faut donc ajouter deux dizaines et donc taper [+] 20 [=]. Il utilise plusieurs connaissances : repérage des chiffres, valeur du chiffre en fonction de sa position, équivalence entre deux dizaines et 20.
Certains de ces exercices peuvent être proposés très tôt, par exemple :
– faire afficher 25 ; sans effacer faire afficher 26, etc. ;
– faire afficher 10 ; sans effacer faire afficher 20, etc. ;
– faire afficher 25 ; sans effacer faire effacer 35, etc. ;
– faire afficher 10 ; sans effacer faire afficher 50, etc. ;
– faire afficher 36 ; sans effacer faire afficher 40, etc. ;
– faire afficher 10 ; sans effacer faire afficher 7, etc. ;
– faire afficher 58 ; sans effacer faire afficher 50, etc. ;
– faire afficher 40 ; sans effacer faire afficher 36, etc. ;
– faire afficher 70 ; sans effacer faire afficher 50, etc. ;
Le but est d'essayer toujours de minimiser le nombre de touches frappées… et de discuter des différentes méthodes utilisées.

Table d'addition

L'activité peut prendre la forme d'un jeu à deux. L'un des élèves tape une séquence du type 8 [+] 7 (en annonçant à l'autre ce qu'il tape). Le deuxième élève annonce oralement un résultat. Le premier élève appuie alors sur [=]. Si le résultat affiché correspond au résultat annoncé, le deuxième élève marque 1 point, sinon c'est l'autre joueur qui marque 1 point.
Cette activité constitue une occasion de s'entraîner sur la connaissance de la table d'addition.

Calcul : interrogation mutuelle

L'activité, voisine de la précédente, est réalisée avec deux élèves. L'un des élèves tape une séquence du type 21 [–] 7 (en annonçant à l'autre ce qu'il tape). Le deuxième élève doit écrire le calcul dicté et le résultat. Le premier élève appuie alors sur [=]. Si le résultat affiché correspond au résultat écrit, le deuxième élève marque 1 point, sinon c'est l'autre joueur qui marque 1 point.
Par rapport à l'exercice précédent, celui-ci conduit l'un des élèves à écrire, en chiffres, les nombres et calculs dictés par l'autre joueur.

Calcul : d'un nombre à l'autre en au plus trois étapes

Un premier nombre est affiché sur l'écran de la calculatrice (par exemple 85). Sans éteindre la calculatrice, ni effacer le nombre affiché, il s'agit d'obtenir l'affichage de 812 en au plus trois opérations.
Selon les connaissances des élèves, on peut obtenir par exemple, les séquences suivantes (les résultats intermédiaires correspondent aux nombres encadrés) :

85 [+] 700 [=] $\boxed{785}$ [+] 15 [=] $\boxed{800}$ [+] 12 [=] $\boxed{812}$

85 [×] 10 [=] $\boxed{850}$ [–] 30 [=] $\boxed{820}$ [–] 8 [=] $\boxed{812}$

Cette activité favorise un travail d'anticipation et une première approche des ordres de grandeur. Elle peut s'accompagner ou non d'une traduction écrite de la suite des calculs effectués, par exemple pour le deuxième calcul : 85 × 10 = 850 ; 850 – 30 = 820 ; 820 – 8 = 812.

Calcul : affichages sous contraintes

Un nombre doit être obtenu à l'affichage, en respectant certaines contraintes pour provoquer cet affichage. Par exemple :
– faire afficher 16 en tapant aussi sur [+] ou sur [×] ;
– faire afficher 16 sans taper ni 1 ni 6.

Concours de calcul

Dans ces exercices (qui peuvent être proposés en fin de cycle 2 et repris au cycle 3), on offre le choix à l'élève du moyen de calcul utilisé…
Où l'on prend conscience que le plus rapide n'est pas toujours celui qu'on croit et que le calcul direct d'une expression n'est pas toujours la procédure la plus économique. Par exemple :
– calculer vite 25 + 10 mentalement, à la main ou à la calculatrice, 136 + 10 ; 145 + 200, etc. ;
– calculer à la calculatrice le plus vite possible : 13 + 13 + 13 + 13 +13 + 13 + 13 (ici taper 13 × 7 ou 7 × 13 est plus rapide),
27 + 27 + 27 + 27 + 27 + 27 + 27 + 27 + 27 + 27 (ici remarquer qu'on a 10 fois 27 permet décrire directement le résultat !) ;
– retrouver le plus vite possible le nombre juste (mentalement, à la main ou à la calculatrice) : 28 + 15 parmi 102, 45 et 43, 32 × 10 parmi 300, 320 et 250, 10 × 13 parmi 300, 103 et 130, etc.

Cycle des approfondissements

Les trois exemples suivants rendent compte de quelques possibilités offertes par la calculatrice au cycle 3.

Concours de calcul

Dans ces exercices (voir la description pour le cycle 2), on offre le choix à l'élève du moyen de calcul utilisé… et on lui permet de prendre conscience que le moyen plus rapide n'est pas toujours celui qu'on croit et que le calcul direct d'une expression n'est pas toujours la procédure la plus économique. Par exemple :

– calculer vite 350 + 50 mentalement, à la main ou à la calculatrice, 13,6 × 10 ; 4,5 + 5,5 ; etc. ;

– calculer à la calculatrice le plus vite possible le quotient et le reste de 149 divisé par 7 ou 23,7 + 23,7 + 23,7 + 23,7 + 23,7 + 23,7 + 23,7 + 23,7 + 23,7 + 23,7 (ici remarquer qu'on a 10 fois 23,7 permet décrire directement le résultat !).

Effectuer des calculs dépassant la capacité d'affichage de la calculatrice

Prenons l'exemple d'une calculatrice dont l'écran permet l'affichage de huit chiffres.

Calculer avec la calculatrice 74 400 000 + 53 000 789 : les deux nombres sont affichables, mais la frappe sur [=] ne donne pas le résultat attendu : selon les calculatrices il affiche « ERREUR » ou passe en notation exponentielle (une nombre à virgule suivi d'une puissance de 10). Le calcul à la main permet de trancher. De plus cet essai prouve qu'il est nécessaire, avant d'utiliser la calculatrice, de vérifier l'ordre de grandeur du résultat, pour savoir s'il « tiendra » sur l'écran d'affichage.

Un travail intéressant peut être menée sur l'aide que peut apporter la calculatrice dans de tels cas :

– Exemple 1. Calculer 85 156 426 + 78 562 256.

Une frappe directe ne permet pas de conclure, une procédure possible est de scinder le nombre, par exemple de taper 156 426 [+] 562 256 ; d'écrire le résultat (718 682) ; puis de taper 85 [+] 78 ; d'écrire le résultat en lui affectant sa valeur dans le nombre cherché (soit 163 000 000) et de faire à la main la somme des deux nombres obtenus.

– Exemple 2. Calculer 123 456 × 789.

Le résultat est inférieur à 124 000 × 789 ; le calcul à la machine 124 [×] 789 donne 97 836 : le résultat est affichable directement car inférieur à 97 836 000. Le résultat a huit chiffres, il est lisible à l'affichage.

– Exemple 3. Calculer 231 456 × 789.

Le résultat est inférieur à 232 000 × 789 ; le calcul à la machine 232 [×] 789 donne 183 048 ; on obtient un nombre de neuf chiffres.

Le résultat est supérieur à 231 000 × 789 ; le calcul à la machine 231 [×] 789 donne 182 259 ; le résultat est donc supérieur à 182 255 000 : il n'est pas affichable directement.

Procédure possible : décomposer le nombre en 231 000 + 456 ; effectuer séparément les calculs 231 × 789 et 456 × 789, à la calculatrice ; recomposer le résultat par écrit : 182 259 000 + 359 784 ; effectuer les derniers calculs par tranches.

Les calculs précédents imposés par les limitations de la calculatrice sont de véritables problèmes pour les élèves ; ils nécessitent le réinvestissement des connaissances en numération et la compréhension des techniques opératoires.

Décimaux : passer d'un nombre à un autre

Un premier nombre est affiché sur l'écran de la calculatrice (par exemple 4,785). Sans éteindre la calculatrice, ni effacer le nombre affiché, il s'agit d'obtenir l'affichage de 4,805 en une seule opération.

Pour répondre, l'élève doit remarquer que le chiffre des centièmes est passé de 8 à 0 pour obtenir un nombre plus grand ; il a « avancé de 2 », entraînant le chiffre des dixièmes. Il faut donc ajouter deux centièmes et donc taper [+] 0,02 [=]. L'élève utilise plusieurs connaissances : repérage des chiffres, valeur du chiffre en fonction de sa position, équivalence entre deux centièmes et 0,02.

Multiplication sans [×]

Il s'agit, sans utiliser la touche [×] et avec un minimum d'opérations, de calculer les produits suivants : 387 × 204 et 387 × 199.

Pour le premier produit, les élèves peuvent par exemple calculer, avec l'aide de la calculatrice : 38 700 + 38 700 + 387 + 387 + 387 + 387, et pour le second : 38 700 + 38 700 – 387.

Ils ont dû utiliser implicitement la distributivité de la multiplication sur l'addition (multiplier 387 par 204 revient à faire la somme de 387 × 200 et de 387 × 4), l'équivalence entre multiplication et addition itérée (387 × 4 c'est comme 387 + 387 + 387 + 387), le fait que multiplier 387 par 200 revient à multiplier 387 par 100 puis le résultat par 2…

Trouver un quotient et un reste avec une calculatrice ordinaire

Comment, avec une calculatrice qui ne possède pas de touche « division euclidienne », obtenir la solution du problème suivant : « Le confiseur range 2 748 chocolats dans des boîtes de 45 chocolats. Combien de boîtes pleines obtient-il et combien reste-t-il de chocolats non rangés ? »

En calculant 2 748 : 45, la calculatrice affiche 61.066666. Le nombre de boîtes ne peut être que 61. On peut en déduire que le quotient entier est 61. On peut alors obtenir le multiple de 45 immédiatement inférieur à 2 748, en calculant 45 × 61 (résultat : 2 745). Ce qui permet de calculer le reste : 2 748 – 2 745 = 3. Les élèves peuvent vérifier le résultat en s'appuyant sur l'égalité fondamentale de la division euclidienne : 2 748 = (45 × 61) + 3.

Pour certains élèves maîtrisant les décimaux, la question se pose de savoir à quoi correspond la partie 0,066 666 6 (qui d'ailleurs est 0,066 666 67 pour certaines calculatrices) : il s'agit de la part de boîtes que remplirait le reste de bonbons. On peut retrouver ce reste en enlevant 61 au quotient fourni et en multipliant cette valeur par 45 (soit 3 ou plus exactement 2,999 999 7).

Résoudre un problème, en réfléchissant… et en expérimentant

Avec la calculatrice, on ne peut utiliser que les touches [+], [×], [=] et 2. On affiche au départ le nombre 18. Sans effacer ni éteindre, comment peut-on atteindre le nombre 330, en utilisant le moins possible de calculs ?

Les élèves peuvent d'abord expérimenter diverses solutions… pour en tirer des conclusions sur la plus économique, qui consiste à s'approcher rapidement du nombre à atteindre par des multiplications par 2. Dans ce cas, aller d'abord de 18 à 20, puis de 20 à 40, 80, 160 et 320, puis, par ajouts successifs de 2, de 320 à 330.

D'autres cibles peuvent être proposées. Ainsi, si le nombre à atteindre était 360, il serait plus rapide d'aller dans un premier temps à 22 avant de commencer à doubler.

Bibliographie

– La revue *Grand N*, éditée par l'IREM de Grenoble (BP 41, 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex), a consacré plusieurs articles à l'utilisation des calculatrices à l'école dans ses numéros 53, 54, 55 et 57.

– Un numéro spécial de cette revue, consacré au CM, comporte également deux articles consacrés aux calculatrices (« Exemples d'activités sur petites machines au CM », 1981 – Croquette et Guinet, 1re partie ; Guinet, 2e partie).

– Les cinq ouvrages de la série Ermel, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, du CP au CM2, comportent également des activités faisant appel à l'utilisation des calculatrices (Hatier, à partir de 1991).

Deux citations d'enfants montrent que les élèves ont conscience des limites de l'instrument : « Une calculatrice sert à trouver le résultat d'une opération qu'on lui pose et qui est très difficile à calculer de tête, exemple : 5 780 954 × 6 984 = (voir sur la calculatrice) » ; « Ce n'est pas toujours facile à calculer avec. »

Laissons un enfant conclure : « Ça peut être pratique et ça peut même être drôle. »

Espace et géométrie au cycle 2

Ce chapitre a pour objet de fournir des indications pour l'enseignement de « l'espace et de la géométrie au cycle 2 ». Il reprend et complète celles données dans le document d'application *Mathématiques, cycle 2*, dans la partie « Espace et géométrie ». Le choix a été fait de privilégier les exemples concernant le travail sur les compétences spatiales, dans la mesure où cet aspect des apprentissages peut apparaître comme plus nouveau que ce qui est relatif à la géométrie.

Le changement du titre de cette partie du programme, par rapport à celui de 1995 dans lequel la référence à l'espace avait été abandonnée, traduit la volonté de souligner que les apprentissages spatiaux, dont certains aspects relèvent traditionnellement de l'enseignement des mathématiques, ne sont pas terminés à la fin du cycle 1.

Les compétences devant être acquises en fin de cycle 2 relèvent de quatre familles : « Repérage, orientation », « Relations et propriétés », « Solides » et « Figures planes ».

La famille « Repérage, orientation » concerne des connaissances qui relèvent également d'autres champs du programme : « Maîtrise du langage oral » (plus particulièrement la rubrique : « Continuer à apprendre à parler la langue française et à la comprendre »), « Découvrir le monde » (plus particulièrement la rubrique : « De l'espace familier aux espaces lointains »), « Éducation physique et sportive » (plus particulièrement la rubrique : « Adapter ses déplacements à différents types d'environnements (activités d'orientation) »).

Les trois autres familles, « Relations et propriétés », « Solides » et « Figures planes », sont davantage spécifiques aux mathématiques. Elles donnent cependant l'occasion de travailler des notions utilisées pour décrire l'espace et ses objets, en mobilisant le langage courant. Elles sont également utiles pour la réalisation de maquettes et de constructions techniques, citée dans la rubrique « Les objets et les matériaux » de « Découvrir le monde ».

Précisons la signification de quatre termes fréquemment utilisés dans les activités géométriques à l'école primaire :

– « reproduire » un objet, c'est en faire une copie à l'identique, cet objet étant visible un certain moment (mais pas nécessairement pendant tout le temps de l'activité). Quand l'objet est un dessin plan, la superposition de l'original et de l'objet produit permet de contrôler la qualité de la reproduction. La reproduction peut être réalisée à l'échelle 1 ou à une autre échelle ; dans ce dernier cas, la validation se fait par superposition à l'aide d'un calque réalisé par l'enseignant ;

– « décrire » un objet, oralement ou par écrit, c'est utiliser un vocabulaire géométrique permettant à un interlocuteur d'identifier l'objet, de le reproduire ou de le représenter ;

– « représenter » un objet ou une situation spatiale, c'est l'évoquer à l'aide de procédés graphiques conventionnels ;

– « construire » un objet, c'est le produire à partir d'un texte descriptif ou prescriptif, à partir d'un schéma éclairé ou non par du texte, des codages…

Espace et géométrie – quels enjeux pour le cycle 2 ?

Ce que la tradition appelle « enseignement de la géométrie » renvoie, à l'école primaire, à deux champs de connaissances : d'une part celui des connaissances nécessaires à l'enfant pour contrôler ses rapports usuels avec l'espace, champ souvent désigné par « structuration de l'espace », d'autre part celui de la géométrie proprement dite.

Savoir prendre, mémoriser, exploiter (en particulier communiquer) des informations spatiales pour se déplacer, pour reconnaître ou construire des objets, nécessite des apprentissages qui ne s'effectuent pas tous spontanément. C'est le cas, par exemple, de l'utilisation des cartes et des plans en situation réelle. Ces compétences ne sont pas toutes formulables dans les termes usuels de la géométrie et elles relèvent également d'autres disciplines comme l'EPS ou la géographie. Elles constituent les bases nécessaires à toute maîtrise fine de certaines activités humaines qui se développent en relation avec l'espace. Ainsi, la représentation des objets en perspective pose des problèmes importants à des élèves de quinze ans s'ils n'ont jamais eu l'occasion de s'interroger sur la différence entre ce qu'ils voient d'un objet et ce qu'ils en savent.

Le champ de la géométrie proprement dite constitue un savoir mathématique, élaboré au cours de l'histoire, dont l'intérêt pour les jeunes est double :

– fournir des outils et développer des connaissances nécessaires pour résoudre des problèmes de l'espace physique rencontrés dans le cadre de pratiques professionnelles, sociales et culturelles ;
– initier au raisonnement déductif.

Le premier aspect est abordé au cycle 2, puis développé au cycle 3. Le deuxième aspect n'est vraiment travaillé qu'au collège.

Les élèves du cycle 2, qui ont entre cinq ans et demi et huit ans, doivent encore consolider de nombreuses compétences spatiales avant de pouvoir tirer profit d'un enseignement visant la connaissance explicite de concepts géométriques. Aussi, les compétences visées en fin de cycle 2 renvoient-elles, pour une part importante, à la structuration de l'espace et sont-elles dans la continuité de celles attendues en fin de cycle 1 : maîtrise du langage spatial dans différentes conditions, réalisation et/ou utilisation de plans ou de maquettes en rapport avec l'espace réel, développement de nouvelles connaissances comme l'alignement ou de nouvelles compétences comme la capacité à décrire, dans une situation spatiale, ce que voit quelqu'un placé à un autre endroit.

La démarche du document d'application

Le premier paragraphe du document d'application propre au cycle 2 (« Contenus, compétences et commentaires ») précise le rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques : « Dès le cycle 2, la résolution de problèmes occupe une place centrale dans la construction et l'appropriation par les élèves des connaissances mathématiques répertoriées dans les différentes rubriques du programme : conquête des nombres entiers naturels, compréhension de leurs désignations (écrites en chiffres, orales), premiers éléments du calcul, structuration de l'espace et approche des formes géométriques, découverte de quelques grandeurs et de leur mesure. Des moments de synthèse, d'entraînement et de réinvestissement sont également nécessaires pour assurer une bonne maîtrise des compétences visées en fin de cycle. »

La résolution des problèmes concernant des situations spatiales ou géométriques (en particulier les problèmes de reproduction ou de construction d'objets) nécessite souvent d'articuler des connaissances relatives aux grandeurs (limitées aux longueurs au cycle 2) et des connaissances relatives aux objets concernés.

Comment choisir des situations

Donner des indications pour retrouver un objet caché

Le langage spatial prend du sens dans des situations où il faut donner des indications à quelqu'un pour retrouver un objet caché. Faire vivre dans la classe des jeux de ce type permet aux élèves de comprendre la nécessité de recourir à des procédés langagiers ou graphiques précis, éventuellement introduits par l'enseignant s'ils ne sont pas connus. Par exemple, plusieurs boîtes absolument identiques sont disposées dans la classe, un objet est caché dans l'une d'entre elles en l'absence de deux élèves, mais devant les autres. Au retour des deux élèves absents, les autres élèves doivent leur donner des indications pour qu'ils retrouvent l'objet caché du premier coup.

Construire un objet superposable à un objet donné

Ce type de problème correspond à des situations rencontrées dans la vie courante, comme avoir à découper une étagère dans une plaque de bois qui s'adapte à un emplacement donné. Pour réussir, il faut déterminer certaines des propriétés géométriques de la forme à découper et être capable de les utiliser dans un tracé. De même, dans la classe, c'est en ayant à reproduire un carré, sous certaines conditions, qu'après des tentatives infructueuses, les élèves peuvent découvrir qu'il ne suffit pas qu'un quadrilatère ait quatre côtés de même longueur pour qu'il soit un carré, mais qu'il faut également contrôler les angles.

Utiliser un plan

Un plan est un document qui sert à communiquer des informations sur un espace. C'est ainsi qu'il est conçu dans les activités d'orientation en EPS, comme le précise cette compétence de fin de cycle 2 : « Dans un milieu connu [parc public], par deux, retrouver cinq balises sur les indications données par le groupe qui les a placées. » Est évoquée ici une situation de communication entre élèves mettant en jeu des « émetteurs » et des « récepteurs ». Les émetteurs sont chargés de placer les balises dans un certain espace et de trouver le moyen de désigner leurs positions pour que, à partir de ces indications, les récepteurs les retrouvent. Dans le contexte de l'EPS au cycle 2, on peut penser que les élèves ont à leur disposition un plan du parc, sur lequel ils ont déjà travaillé et que l'enseignant veut contrôler qu'ils sont capables de s'en servir pour repérer une position, en articulant deux catégories de compétences : passer de l'espace réel à l'espace représenté et inversement. De nombreuses connaissances sont en œuvre dans cette activité :
– lecture d'une représentation d'un espace à trois dimensions par un espace à deux dimensions ;
– codage de certains éléments trop difficiles à représenter ;
– orientation du plan.

Dans le cadre de l'enseignement de l'espace en mathématiques, les élèves peuvent être confrontés à des situations de même type, dans des espaces moins complexes que ceux utilisés en EPS.

Caractéristiques de cette démarche

Les commentaires du programme indiquent que « les activités proposées doivent être finalisées et avoir un but clairement identifié par les élèves… Les élèves doivent être à même de valider les procédures mises en œuvre et le maître se doit de ne pas intervenir trop rapidement dans le choix des procédures ou des outils à utiliser ». Comment concevoir des situations dans cette optique ?

Les problèmes proposés doivent prendre place dans des situations finalisées

Dans le programme, ces problèmes sont caractérisés par quelques verbes :
– dans le cadre de la structuration de l'espace : « dans l'espace environnant, observer, situer, repérer, guider, communiquer des informations » ;
– dans le cadre de la géométrie : « comparer, reproduire, construire, identifier ou décrire des objets géométriques ».

Ces verbes ne suffisent cependant pas à caractériser les situations dans lesquelles les élèves doivent être placés. Pour qu'ils soient à même de valider les procédures mises en œuvre, il faut que l'activité soit finalisée par un but. De plus, pour qu'ils puissent réguler leurs procédures, il est nécessaire que plusieurs essais soient possibles. Dans cet esprit, le travail sur des situations réelles avec des objets manipulables doit précéder le travail sur fiche dont la place doit rester limitée.

Dans le premier exemple (donner des indications pour retrouver un objet caché), l'utilisation du langage spatial est motivée par le but à atteindre et déclenchée par l'instauration d'une situation de communication entre élèves.

Dans le deuxième exemple (construire un objet superposable à un objet donné), la mise en évidence des propriétés du carré est motivée par la nécessité d'une reproduction à l'identique.

Dans le troisième exemple (utiliser un plan), la mise en relation de l'espace représenté avec l'espace réel est motivée par la volonté de réussir dans la recherche des balises.

Dans ces conditions, la validation de la stratégie mise en œuvre n'est pas sous la seule responsabilité de l'enseignant : l'élève peut vérifier lui-même si le but est atteint ou non. Si ce n'est pas le cas, l'analyse des différences entre la production attendue et la production réalisée, les échanges avec ses camarades, lui fournissent des informations et l'incitent à engager de nouvelles tentatives dans des conditions améliorées.

Le langage spatial ou géométrique peut donc être introduit en situation. Les élèves sont alors en mesure de lui donner un premier sens, qui sera précisé, élargi, au cours de la résolution d'autres problèmes. Ce n'est que peu à peu qu'ils deviennent capables de l'utiliser convenablement et de le substituer aux termes de la langue courante comme « coin, trait, bord, etc. ».

Ainsi, des élèves de fin de cycle 2 ont à reproduire sur une feuille blanche un carré découpé dans du carton, à partir d'un côté déjà tracé non parallèle aux bords de la feuille, sans avoir recours à ce carré comme gabarit. Ils tentent d'abord de construire un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur et sont tout étonnés que leur quadrilatère et le carré ne soient pas superposables. En débattant, en découpant et repositionnant le quadrilatère construit, ils remarquent que les « coins », comme ils appellent spontanément les angles, « ne vont pas » et recherchent le moyen de les construire correctement. C'est à ce moment que l'enseignant peut introduire le terme « angle droit » et l'usage d'un instrument (par exemple un gabarit d'angle droit), mais sans chercher à donner une définition de l'angle droit.

Le choix de certaines variables des situations joue un rôle décisif

Deux situations « à consigne d'action identique » peuvent développer des apprentissages différents selon la nature de certaines variables des dispositifs spatiaux ou des objets en cause. Les trois exemples déjà évoqués permettent d'en donner une illustration.

Dans le premier exemple (donner des indications pour retrouver un objet caché), le nombre de boîtes, leur disposition spatiale (dans la classe ou sur un grand quadrillage au sol, proches ou non de repères marquants, etc.) sont des variables à la disposition de l'enseignant pour construire des dispositifs favorisant l'émergence de certains concepts (« près de…, à gauche de…, à mi-chemin entre…, sur la première ligne et la troisième colonne, etc. »).

Dans le deuxième exemple (construire un objet superposable à un objet donné), les compétences travaillées sont très différentes selon :
– la complexité des tracés : traits s'appuyant tous sur les lignes du quadrillage ou joignant des nœuds non situés sur une même ligne ;
– la position du quadrillage dans la feuille (usuelle ou en biais) ;
– la possibilité ou non de voir en même temps la figure à reproduire et celle qui est en cours de réalisation. Si elle est visible, l'élève peut procéder au coup par coup. Si elle ne l'est pas, il doit identifier et garder en mémoire ou noter certaines propriétés déterminantes de la figure. La deuxième situation, plus difficile, est plus favorable à la conceptualisation.

Dans le troisième exemple (utiliser un plan), le travail sur l'orientation d'un plan peut également être mené dans un espace limité. Par exemple, des objets cachés dans la classe doivent être retrouvés en utilisant un plan simplifié. Le passage à un autre type d'espace, celui du parc, par exemple, soulève d'autres questions, en particulier celle du choix de repères pertinents.

Les situations de référence doivent être complétées par des situations de réinvestissement

Les problèmes qui ont permis aux élèves de construire des connaissances nouvelles constituent pour eux des situations de référence qui ne suffisent pas à assurer un apprentissage efficace. Des situations de réinvestissement sont nécessaires, dans lesquelles les connaissances dégagées vont être reconnues, formulées, précisées et prendre peu à peu le statut de savoirs, en même temps que les élèves vont pouvoir affiner leurs compétences. Ainsi, les élèves peuvent être invités à rechercher les carrés, dans un ensemble de figures, comportant des carrés et des « presque-carrés », placés dans des directions différentes (en particulier avec leurs côtés non parallèles aux bords de la feuille). Dans cette activité, les élèves de fin de cycle 2 trouvent une occasion de dissocier la propriété « être carré » de sa reconnaissance visuelle. Dans un premier temps, ils classent les figures en carrés et non-carrés sur la base de la seule perception. Dans un second temps, ils ont recours aux propriétés (« les quatre côtés ne sont pas de même longueur, donc ce n'est pas un carré ») et aux instruments (gabarits d'angle droit, règle…) pour confirmer ou infirmer leur choix initial. Ils commencent ainsi à dissocier la « vérité géométrique » de la « vérité perçue ». Plus tard, à la fin du cycle 3 par exemple, le projet de tracer sur le sol de la cour un grand carré de 6 mètres de côté conduit à s'interroger sur les instruments à utiliser, à repenser leur emploi, à découvrir qu'une figure peut avoir les propriétés d'un carré sans qu'elle soit perçue comme telle, pour des raisons d'orientation ou de perspective.

C'est ainsi que les compétences relatives au langage géométrique, à la maîtrise des instruments et des techniques peuvent se développer peu à peu, dans des situations variées et signifiantes pour les élèves. Comme pour les enseignements numériques, seul un nombre suffisant de séances consécutives permet de mener à bien de telles situations. Il n'est donc pas pertinent de concevoir un enseignement de la géométrie limité à une séance par semaine. En effet, celui-ci ne permet pas aux élèves de s'approprier, sur un thème donné, des compétences et des connaissances organisées.

L'utilisation d'instruments de tracés divers, usuels ou non, doit faire l'objet d'un entraînement

Il est essentiel de développer chez les élèves une habileté dans l'utilisation de ces instruments lors d'activités spécifiques où l'élève apprend à bien tenir le crayon d'une main et la règle de l'autre, à régler et poser le compas, à contrôler la position d'un gabarit pour comparer des longueurs ou pour vérifier qu'un angle est droit.

Quelques questions posées par la validation

Comme cela a déjà été souligné, la validation doit être placée sous la responsabilité des élèves. Il est important qu'ils puissent prendre conscience par eux-mêmes de la validité des procédures qu'ils ont mises en œuvre. Pour cela, l'enseignant détermine à quels moments il doit s'interdire d'intervenir pour que les élèves puissent mesurer les effets de leurs décisions. À d'autres moments, l'enseignant doit apporter de l'information, poser des exigences de précision pour les tracés ou pour le vocabulaire employé.

Les productions des élèves peuvent être matériellement erronées alors que la stratégie a été correcte

En effet, le rapport au réel est source d'ambiguïtés. Même exécutée par un adulte, la reproduction d'une figure ne se superpose pas exactement au modèle. Des erreurs interviennent, liées non à la conceptualisation mais à l'imprécision des mesures ou des instruments (ou à un défaut dans leur maniement). Ce phénomène d'imprécision, fondamental, est constitutif des rapports entre la géométrie et la réalité qu'elle permet de décrire. Il est donc nécessaire que les élèves y soient confrontés assez tôt. L'enseignant doit donc accepter une marge de tolérance, discutée avec les élèves. La discussion autour des causes possibles de cette nécessaire tolérance est cependant difficile au cycle 2. Elle relève davantage du cycle 3 où il devient important de distinguer si un résultat incorrect est dû :

– à une erreur de stratégie : non-respect des propriétés de l'objet, mauvaise organisation des étapes… ;

– à l'imprécision des mesures ou à une utilisation maladroite des instruments.

Le but fixé peut être atteint alors que leur stratégie n'est pas pertinente

Ainsi, dans une situation de communication, les élèves peuvent se comprendre et réussir en utilisant des termes erronés ou imprécis ou non géométriques. Par exemple dans un jeu de portrait pour faire retrouver une figure dont ils ne connaissent pas le nom (trapèze, par exemple), au lieu de la caractériser par le nombre de ses côtés, les élèves de CE1 se font très bien comprendre de leurs camarades en la décrivant comme « un pot de fleur retourné ». L'enseignant constate et accepte la réussite, mais précise aussi à cette occasion le mot mathématique correct.

Domaine spatial – exemples d'activités

Rappelons que le document d'application, dans la partie « Éléments d'aide à la programmation » (pages 33 à 37), précise les compétences énumérées dans le programme et, pour chaque année du cycle, indique la nature du travail à faire avec les élèves à leur propos : approche/préparation, construction/structuration, consolidation/utilisation.
Les situations décrites ci-après correspondent en général à la phase « construction/structuration ».
Ce n'est vraiment qu'au cycle 2 que les élèves peuvent commencer à relier l'espace réel à des représentations de cet espace telles que des photographies, des maquettes ou des plans. Beaucoup de manuels font l'impasse sur le travail nécessaire à la construction de ces relations et ne proposent que des activités sur des dessins représentant des espaces fictifs. Or, des recherches portant sur les compétences de jeunes de l'enseignement professionnel ont montré que la maîtrise de ces relations était insuffisante pour leur permettre de mener à bien des tâches professionnelles courantes telles que la lecture de plans ou de graphismes techniques. Dès le cycle 2, ces compétences peuvent être travaillées à partir de situations appropriées, qui nécessitent, il est vrai, du matériel et un temps de préparation relativement importants.
Trois types d'activités sont proposés ci-après pour illustrer les apprentissages relatifs à cette partie. Ils concernent respectivement le repérage, l'orientation et les points de vue.

Retrouver un objet caché

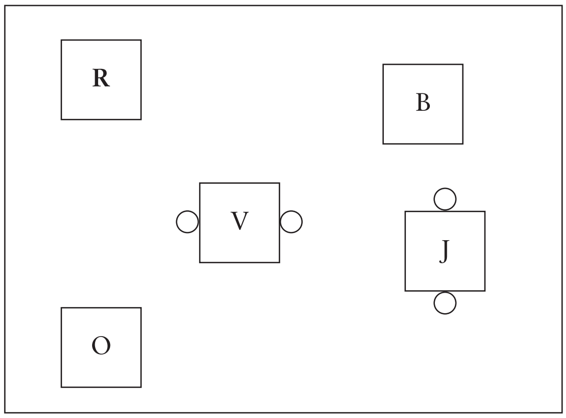
La situation décrite est destinée à développer l'utilisation du langage spatial dans des situations de plus en plus complexes et à travailler les compétences ainsi décrites dans le document d'accompagnement : « De nombreuses situations proposées dans l'espace environnant fournissent des occasions d'observer une même réalité sous différents angles, de confronter les points de vue correspondants ou d'anticiper un point de vue en fonction d'une position supposée d'un observateur. »

Situation de départ

Plusieurs boîtes absolument identiques sont disposées dans la classe. Un objet est caché dans l'une d'entre elles en l'absence de deux élèves, mais devant les autres. Au retour des deux élèves, les autres doivent leur donner des indications pour qu'ils retrouvent l'objet caché du premier coup, sans montrer du doigt son emplacement.
Appelons « émetteurs » les enfants qui décrivent la position de l'objet caché et « récepteurs » ceux qui doivent la retrouver.
Il n'est pas facile pour les émetteurs de renoncer à montrer l'emplacement. On observe souvent qu'il est plus facile aux récepteurs de poser des questions qu'aux émetteurs de donner d'emblée des indications.
Le nombre et la position des boîtes doivent être choisis soigneusement, en fonction des relations spatiales dont l'apprentissage est visé.

Émetteurs et récepteurs sont placés de la même manière et regardent dans la même direction (GS ou CP)

Supposons que l'espace utilisé pour le jeu soit un grand tapis, sur lequel l'enseignant a posé cinq gros blocs de couleurs différentes pour servir de repères :

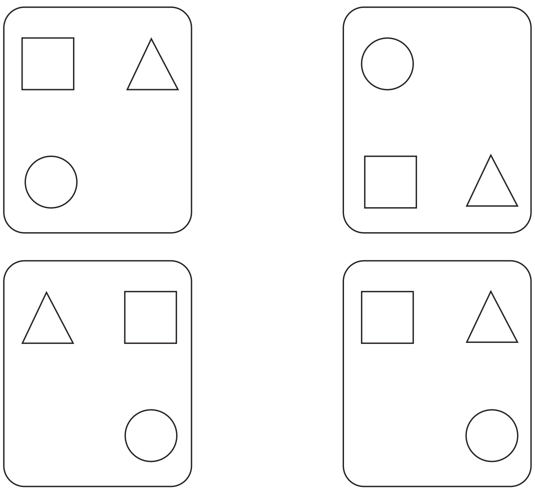


x x x x a b x x x x x x x
x x x x x x x x x x x x x

○ : boîte dans laquelle peut être caché un objet.
□ : bloc de couleur rouge, bleu, vert, jaune, orange.
x : élève émetteur.
a, b : élèves récepteurs.

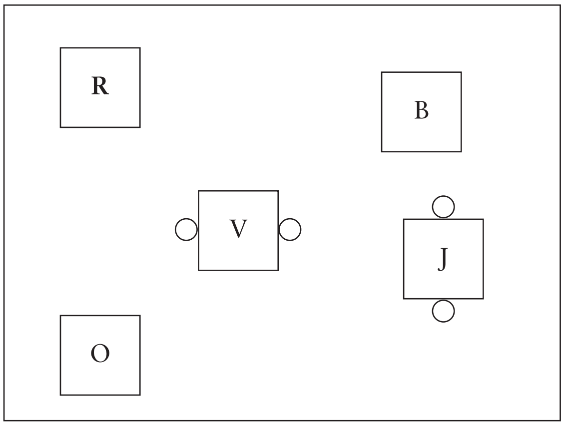
La plupart des concepts spatiaux fonctionnent par paire (« derrière/devant, à droite/à gauche, etc. »). Aussi est-il nécessaire de prévoir des dispositions pour lesquelles un même terme et son opposé sont associés à un même bloc, par exemple une boîte devant le bloc bleu et une boîte derrière ce même bloc, ce qui disqualifiera une question comme : « Est-ce que l'objet est dans la boîte qui est à côté du bloc bleu ? », puisqu'il existe deux boîtes correspondant à cette description.
L'enseignant peut introduire des termes que les élèves n'utilisent pas spontanément (« entre » par exemple) et demander aux émetteurs de les réutiliser après lui.
Lorsque cette situation est établie comme une situation de référence (après une ou plusieurs séances), l'enseignant peut organiser régulièrement, avec le même matériel ou un matériel plus léger, des situations similaires. Étant donnée la complexité du vocabulaire spatial, il est nécessaire de proposer aux élèves, jusqu'à la fin du cycle, de nombreuses expériences brèves (dix minutes par exemple).

Dans cette optique, le repérage dans l'espace du tableau de la classe à l'aide d'expressions comme « en haut et à gauche, etc. » peut se travailler à l'aide de quelques petites feuilles de papier fixées avec un aimant, au verso desquelles un élève ou l'enseignant dessine une croix. L'activité « émetteurs-récepteurs » se déroule alors comme la précédente.
En fin de cycle 2, dès que les élèves en sont capables, il est souhaitable de leur demander d'écrire les indications. Ainsi, dans la situation précédente, où des croix sont dessinées au verso de feuilles affichées au tableau, deux élèves sortent pendant le placement de la croix. Les autres doivent préparer un message écrit (par équipes de deux par exemple). L'enseignant choisit deux ou trois messages qu'il a repérés pendant la phase d'écriture (messages incomplet, incorrect et correct), puis il demande à un des récepteurs de les lire à haute voix et de dire s'il pense que le message convient ou non, avant de le mettre en œuvre. Ce travail écrit permet de revenir ensuite sur les messages puis de dégager, dans la mise en commun, ce à quoi il faut faire attention pour écrire un bon message.
La consolidation de ces connaissances faisant intervenir le langage spatial doit également se réaliser sur l'espace de la feuille de papier comme dans l'activité suivante. Il s'agit d'un jeu de loto construit par l'enseignant où les cartes portent des dessins constitués par la juxtaposition à différents endroits de trois formes simples différentes, par exemple. Le meneur de jeu tire une carte, la décrit sans la montrer (par exemple « la carte où le triangle est à droite du carré et le rond en dessous du carré »), les autres joueurs doivent rechercher s'ils ont bien cette carte sur leur carton de loto :



Les élèves ne sont pas placés de la même manière et ne regardent pas tous dans la même direction (fin CP ou CE1)
Les indications données par les uns ou les autres des émetteurs ne sont fiables que s'ils sont capables de se placer du point de vue du récepteur. Ils doivent donc se décentrer de leur propre point de vue, ce qui est très difficile pour des enfants de cet âge.
Reprenons l'exemple du tapis, en supposant que les émetteurs sont placés de part et d'autre du tapis.

x



a

Des jeux successifs peuvent permettre aux élèves de découvrir et d'exprimer qu'il est facile d'indiquer la position de l'objet caché ci-dessus. Progressivement, ils deviennent capables d'expliciter de nouvelles stratégies à mettre en place pour réussir ou encore d'expliquer pourquoi il faut changer de stratégie.
Les élèves peuvent proposer de se repérer par rapport à l'environnement du tapis (« la boîte tout près de Jules »). Dans un premier temps, le professeur peut accepter ce type d'indications mais il précise ensuite une nouvelle règle du jeu : « Il ne faut utiliser comme repères que les blocs de couleur. »
En fin de cycle 2, dans le cas de la préparation d'un message écrit, la position du récepteur doit être précisée à l'avance. Si la difficulté à anticiper ce que verra le récepteur s'avère persistante, l'enseignant peut inciter les élèves à aller se mettre à sa place pour prendre les informations nécessaires.
La mise en commun doit conduire à prendre conscience d'une condition essentielle pour pouvoir élaborer un bon message : aller voir ou imaginer dans sa tête ce que va voir l'élève chargé de retrouver l'objet.

Communiquer des positions ou des déplacements

Réaliser un plan d'un espace réel consiste à représenter, en dimension réduite, cet espace qu'on ne voit pas d'un seul tenant, en l'imaginant vu de dessus (projection horizontale). Pour utiliser ce plan, il faut être capable de l'orienter et de s'y repérer. La complexité d'une telle tâche nécessite des étapes sur lesquelles il faut revenir régulièrement pendant la scolarité primaire. Mais il ne faut pas pour autant renoncer à présenter des situations où les élèves peuvent s'emparer de la fonction essentielle du plan :

fournir des indications sur une position dans un espace à quelqu'un qui ne la connaît pas. Il faut seulement renoncer à faire produire des plans « achevés », c'est-à-dire à l'échelle et reproduisant tous les détails de l'espace.

Utiliser un plan

Dans un premier temps, une façon économique de faire comprendre le rôle de la représentation de l'espace est de reprendre une activité du type « retrouver l'objet caché », en modifiant la consigne. L'enseignant a placé quatre boîtes identiques contre les murs de la classe. Trois élèves sortent, les autres se mettent d'accord avec l'enseignant sur la boîte dans laquelle l'objet est caché. L'enseignant précise : « Cette fois-ci, personne ne parle, vous allez tous essayer de faire un dessin qui permette à vos camarades de trouver la boîte où est caché l'objet. » L'enseignant choisit des messages de types différents et incomplets et les propose aux trois élèves. Il y a peu de chances pour que les émetteurs produisent d'emblée une solution conforme, mais les échanges occasionnés par les difficultés que rencontrent les récepteurs et l'observation de quelques autres messages peuvent permettre de poser le problème : que faut-il dessiner pour réussir ? Si les quatre boîtes sont dessinées mais si on n'a pas le moyen de savoir où elles sont placées, le message ne permet pas de réussir.

Une ou deux autres séances sont nécessaires pour que des solutions soient trouvées par les élèves : dessin d'une boîte avec référence à un élément du mur près duquel elle est placée, sorte de plan très incomplet, mais où les boîtes sont représentées sur les bords de la feuille et où l'une d'entre elles est marquée et repérée. Il ne faut pas en demander plus à cette étape des apprentissages.

Dans un deuxième temps, ce jeu peut être repris dans la cour de récréation. L'enseignant fournit aux élèves un plan de la cour qu'il a réalisé en indiquant les emplacements des jeux et des obstacles (arbres…), représentés par un code facilement reconnaissable par les élèves. Il a disposé des boîtes identiques à différents endroits de la cour. Pour pouvoir utiliser le plan efficacement, les élèves doivent l'orienter.

Une autre situation, plus « artificielle », peut être proposée aux élèves pour travailler cette question de l'orientation. Le matériel est constitué d'un quadrillage (6 × 6 par exemple) dessiné par terre, aux cases assez grandes, autour duquel les élèves sont assis. Chaque enfant dispose d'un crayon et d'une feuille de papier sur laquelle est représenté le quadrillage. Dans certaines cases sont disposés des pots de yaourt retournés (un par case). Les élèves sont assis autour du quadrillage, ayant en main sa représentation. La consigne est la suivante : « Un enfant va sortir. Pendant ce temps, je vais cacher quatre jetons sous certains pots. Chacun d'entre vous indiquera sur sa feuille où sont cachés les jetons. Je choisirai au hasard une de vos feuilles que je donnerai à l'enfant qui est sorti. Il faudra que, grâce à elle, il réussisse à trouver les jetons. »

Dans cette situation, les difficultés sont de plusieurs sortes :

– repérer les positions des jetons pour les transcrire sur le plan ;

– orienter convenablement le plan au moment de sa lecture, ce qui n'est pas évident puisque le plan étant carré, il y a quatre positions possibles de lecture.

L'orientation peut se faire à l'aide de repères internes au dispositif si les pots ne sont pas disposés de manière symétrique sur le quadrillage ou à l'aide d'un repère externe (« il faut mettre ce côté du plan vers la fenêtre »).

Selon l'âge des élèves, l'enseignant peut favoriser telle ou telle solution en choisissant la disposition des pots.

Là encore, plusieurs séances, entrecoupées de mises en commun et d'échanges, sont nécessaires pour que les élèves comprennent ce qui les empêche de réussir et trouvent des moyens pour repérer la position du plan par rapport à la pièce.

Élaborer une maquette de la classe

Il peut être intéressant de partir d'une vraie maquette (une maison de poupées par exemple), pour faire comprendre aux élèves le but de l'activité : réaliser une maquette de la classe.

Les matériaux utilisés dépendent de l'espace choisi :

– pour réaliser les murs, du carton plume dans lequel des pièces de forme adaptée peuvent être prédécoupées par l'enseignant ;

– pour réaliser des tables et des meubles, des tasseaux de différentes tailles ou des boîtes d'allumettes, des parallélépipèdes en carton léger ;

– pour réaliser des sièges, de petits cubes.

La pâte à fixe est très utile, parce qu'elle permet les tâtonnements.

La construction de maquettes est une activité courante au CP ou au CE1. Nous n'insistons donc ici que sur les points essentiels à prendre en compte pour que ce soit une activité fructueuse pour la plupart des élèves :

– la réalisation de la maquette doit se faire en petit groupe (sept élèves au maximum), les échanges entre les enfants étant régulés par l'enseignant pour faire apparaître les contradictions, les vérifications sur l'espace réel… Si on dispose de matériel suffisant, il est intéressant de faire fabriquer autant de maquettes que de groupes, une étape particulièrement riche étant consacrée au contrôle de la maquette d'un groupe par un autre groupe ;

– les questions d'orientation sont très intéressantes et ne doivent pas être évitées d'entrée de jeu, par exemple en proposant pour la classe une boîte parallélépipédique dans laquelle portes et fenêtres auraient déjà été découpées ;

– après construction par les différents groupes, il peut être très utile de proposer en atelier à tous les élèves de venir individuellement recomposer une des maquettes à partir des éléments en vrac dans une boîte et bien sûr sans autre modèle que l'espace réel. C'est là que l'enseignant peut évaluer les difficultés de certains et travailler à y remédier ;
– les maquettes peuvent être utilisées pour différentes activités : placer les photos des élèves à la bonne place, retrouver un objet caché dans l'espace réel à partir d'indications sur la maquette ou inversement, etc.

De la maquette au plan

Au cycle 2, le plan n'est pas encore un plan à l'échelle. Au fur et à mesure du cheminement des élèves dans le cycle, son élaboration doit cependant vérifier certaines contraintes, comme le respect des formes connues (rectangle, carré, cercle), le nombre et la régularité des côtés pour les autres polygones, les positions relatives des objets. De plus, il faut admettre que sur le plan tous les objets de la réalité ne sont pas forcément représentés.

Dans l'élaboration d'un plan, les élèves ont beaucoup de difficulté à comprendre qu'il s'agit de représenter l'espace et ses objets d'un point de vue qui n'est pas habituel, de dessus. Ceci leur est particulièrement difficile pour les objets verticaux comme les murs ou les meubles hauts, que spontanément ils « rabattent ». L'emploi d'une maquette, associée à des photos, peut les y aider.

Quand on étudie un objet qui a une fonction sociale à l'école, il est toujours intéressant de partir d'exemples issus de la vie extérieure à l'école. Ainsi, l'enseignant peut demander aux élèves d'apporter en classe des plans que leurs parents auraient chez eux. À l'issue d'échanges sur le rôle de ces plans, sur ce qu'on reconnaît et ce qu'on ne reconnaît pas (les murs, fenêtres, portes en général), l'enseignant peut proposer aux élèves : « Nous allons commencer à apprendre à faire un plan (de la classe ou ...) en utilisant nos maquettes. Cela nous permettra aussi de mieux comprendre ce qui est dessiné sur les plans que vous avez apportés. »

Avec le développement des appareils numériques, l'enseignant peut faire plusieurs photos de la maquette, de différents points de vue. Il interroge les élèves sur l'endroit où il était quand il a fait ces photos puis présente la vue de dessus de la maquette. Il n'est pas toujours facile pour des enfants, de CP en particulier, de trouver la position de l'enseignant ni de faire la relation entre la photo vue de dessus et leur propre vue de dessus. Un certain temps doit y être consacré, par exemple en demi-groupe, pour permettre la mise en relation des éléments de la photo et ceux de l'espace réel.

Il peut ensuite leur expliquer que dessiner le plan c'est dessiner le contour des objets tels qu'on les voit sur la photo de dessus et leur proposer de le réaliser individuellement avec l'aide de la maquette. Il ne s'agit pas en effet de « recopier » la photo mais d'imaginer ce qu'on voit de dessus. Beaucoup d'enfants maintiennent des rabattements pour les meubles hauts. La comparaison avec la photo permet ensuite de revenir sur ce type de difficultés.

Un plan « exact », réalisé par l'enseignant, peut servir de support à des activités de repérage et d'orientation. Voici par exemple une activité réalisée dans une classe de cycle 2, l'objectif étant de faire utiliser un plan pour donner ou lire des indications sur la position d'objets cachés.

– Matériel :
Le plan de l'école.
Des boîtes toutes identiques.
Des cubes de couleurs différentes à cacher.
Des enveloppes dans chacune desquelles est placée une lettre.

– Phase 1 – le plan est toujours disponible pour les élèves : les enfants sont répartis par équipe de quatre. Chaque équipe est munie d'un plan de l'école et d'un cube d'une couleur qui lui est propre. Des boîtes identiques ont été dispersées par l'enseignant dans différents lieux de l'école. Deux membres de l'équipe partent cacher un cube dans une boîte de leur choix sans que les autres les voient. Ils indiquent sur leur plan la localisation de cette boîte, sans y faire figurer les autres boîtes. Leurs équipiers prennent connaissance de ces indications et partent à la recherche du cube avec le plan. Ils n'ont le droit d'ouvrir qu'une seule boîte.

Puis les équipiers intervertissent les rôles. Chaque équipe joue deux fois. L'équipe qui a trouvé le plus de cubes de sa couleur a gagné.

Les équipes jouent simultanément. L'enseignant surveille les manipulations et les stratégies des élèves au moment où ils cachent leur objet et au moment où ils le cherchent.

– Phase 2 – le plan reste dans la classe : la même activité est reprise, mais le plan utilisé reste dans la classe, aussi bien pour les élèves qui doivent y indiquer l'endroit où ils ont caché leur objet que pour les élèves qui doivent le consulter avant d'aller chercher cet objet.

Lors de l'exploitation collective, le plan pourra être emporté sur place pour déterminer si les échecs éventuels dans la découverte de l'objet proviennent d'une mauvaise indication fournie par ceux qui l'ont caché ou d'une erreur de lecture de ceux qui l'ont cherché.

– Réinvestissement : l'enseignant place, dans différents endroits, hors de la classe, des enveloppes contenant chacune plusieurs exemplaires d'une même lettre. Il marque cette lettre sur son plan personnel : il pourra ainsi vérifier les réponses des élèves. Ensuite, l'enseignant présente à un élève un plan de l'école où ne figurent que les emplacements des différentes enveloppes, sans indication des lettres. Il désigne un emplacement et demande à l'élève d'aller chercher dans l'enveloppe un exemplaire de la lettre. À son retour, il indique à l'élève s'il a trouvé ou non la bonne lettre. Le plan peut être présenté sous diverses orientations.

Différents points de vue sur un assemblage d'objets

L'objectif est de faire prendre conscience aux élèves que deux personnes qui ne sont pas placées au même endroit face à un dispositif ne voient pas la même chose puis de leur faire imaginer ce que peut voir une personne qui n'est pas située au même endroit qu'eux-mêmes.

Au CP

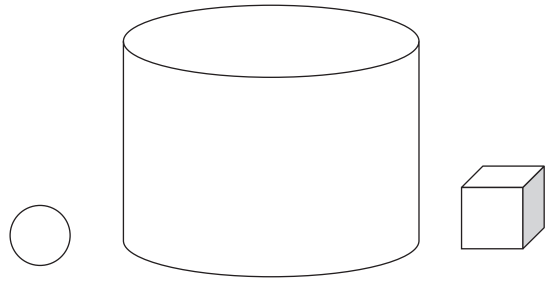
On peut mener des activités à l'extérieur (en délimitant un grand espace au sol) ou dans le gymnase, avec des objets assez gros, genre barils de lessive, cubes de mousse, caissettes, et de plus petits, tous distincts.

– Les objets sont disposés à différents endroits de la salle. Un enfant se promène devant des enfants spectateurs au milieu des objets. Au signal de l'enseignant, il doit s'arrêter sans tourner la tête, quelques-uns des observateurs doivent énumérer les objets qu'il voit. L'enfant promeneur confirme ou non la réponse ; si un observateur se trompe, ce dernier va contrôler lui-même.

– Les objets connus des élèves sont disposés à une dizaine de centimètres les uns des autres, hors de la vue des élèves. Ceux-ci sont répartis en deux équipes, A et B, placées à plusieurs mètres de l'assemblage d'objets, de part et d'autre du dispositif. Les enfants d'une même équipe sont le plus proche possible les uns des autres. Dans cette disposition, certains objets sont vus par les deux équipes (les plus hauts), d'autres par une seule. Les élèves de chacune des équipes doivent énumérer les objets vus par ceux de l'autre équipe. Dans un premier temps, le plus souvent ils n'imaginent pas que leurs camarades puissent voir autre chose qu'eux-mêmes, aussi leur curiosité est-elle piquée quand les observateurs disent ne pas voir les objets énumérés et les discussions sont-elles animées. Les élèves ont besoin de venir contrôler sur place ce que voient effectivement leurs camarades.

– L'enseignant choisit trois objets dont l'un est beaucoup plus haut et large que les deux autres. Il les dispose alignés au sol, le plus gros entre les deux autres, de manière à ce qu'un enfant observateur placé sur la ligne ne voit que ce gros objet et celui qui est de son côté. De plus, il dessine quatre vues en perspective du dispositif : deux vues de face avec les trois objets (une de devant et l'autre de derrière), une vue de gauche (ne comportant donc que deux objets) et une vue de droite.

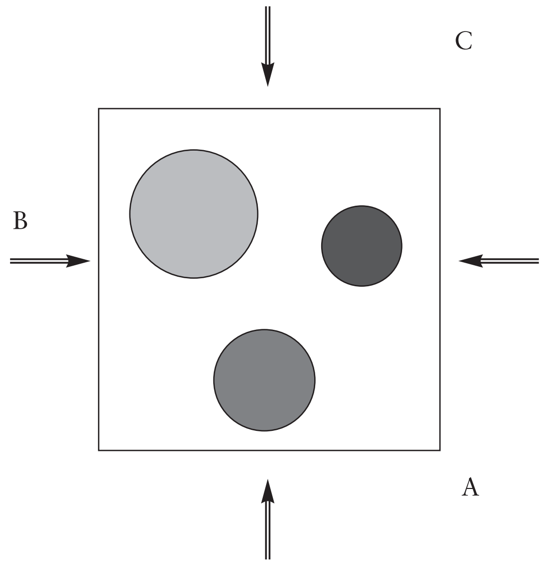
Les élèves sont répartis en équipes de quatre. Chaque équipe jouant à tour de rôle est placée à un certain endroit devant les objets réels. Elle doit alors discuter de la position à prendre pour avoir telle ou telle vue montrée par l'enseignant. Après échange des arguments, l'un des enfants est délégué pour vérifier les suppositions.



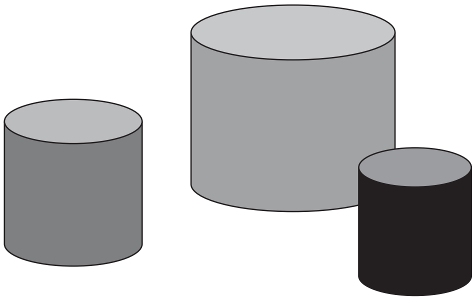
Au CE1

Ce travail peut être repris en adaptant l'épreuve des trois montagnes de Piaget.

Trois cylindres ou trois cônes de couleurs différentes sont disposés sur une table carrée et quatre places repérées de la manière suivante, avec des flèches :



Le professeur a préparé des cartons sur lesquels sont représentées les vues en perspective des quatre positions. Les élèves, assis derrière la position A sont répartis en équipes de trois ou quatre. Ils reçoivent une vue (comme ci-dessous) et doivent dans un premier temps se mettre d'accord entre eux pour dire de quelle endroit elle a été faite et justifier leur réponse. Ils peuvent envoyer un « éclaireur » près du dispositif s'ils en ont besoin. Dans un deuxième temps, la mise en commun permet d'échanger les arguments, de prendre conscience en particulier qu'il faut se référer aux positions des trois objets et pas seulement de deux.

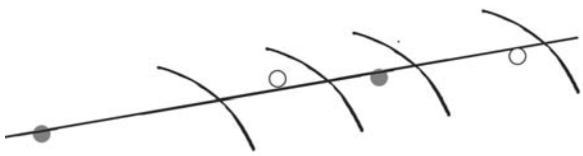


Il n'est pas possible au CE1 de demander aux élèves de dessiner ce qu'ils voient ; c'est une tâche réservée au cycle 3. À cet âge, les enfants ne savent pas encore bien distinguer ce qu'ils savent d'une situation spatiale de ce qu'ils en voient.
Le professeur peut aussi repérer d'autres positions par rapport au dispositif et demander de choisir, par exemple, parmi trois vues, laquelle correspond à une des positions montrées avec sa flèche.

Du domaine spatial au domaine géométrique

À propos de l'alignement

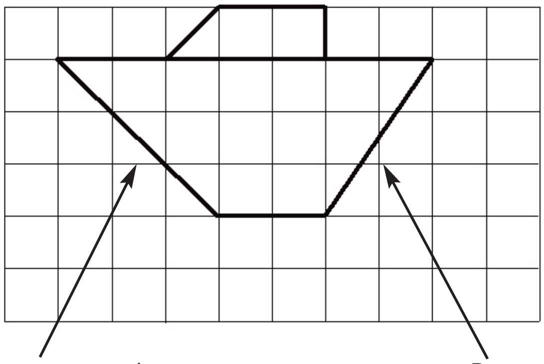
La notion d'alignement est nouvelle dans les programmes du cycle 2. Avant de travailler sur ce sujet sur une feuille de papier (notamment en dernière année de cycle 2), il est important de travailler dans l'espace, dans le prolongement d'ailleurs des activités sur les points de vue et le langage spatial.
Le terme « alignement » peut être introduit en EPS pour décrire des positions respectives des élèves. On peut faire remarquer que quand les enfants d'une file sont bien alignés et que l'on se met face à cette file, on ne voit que l'enfant placé devant et éventuellement les têtes de ceux qui sont plus grands. L'alignement est contrôlable par la visée. Pour vérifier si trois arbres de la cour, par exemple, sont alignés, il faut chercher si on peut trouver un point de vue d'où l'arbre le plus proche de soi cache les deux autres.
Un exercice intéressant consiste à donner une quille à chaque élève d'un groupe de quatre ou cinq. Le professeur place deux quilles à 50 cm l'une de l'autre et délimite des zones de largeur 30 cm environ, comme ci-dessous. Chaque élève doit placer sa quille sur le sol de manière à ce qu'elle soit alignée avec les précédentes et dans une nouvelle zone. Au moment du contrôle de l'ensemble, soit les élèves, soit le professeur si les premiers n'y pensent pas, peuvent relier l'alignement et la disposition des quilles le long d'une ficelle tendue entre les deux quilles données au départ.



La ficelle tendue est remplacée par une bande de carton ou une règle quand on travaille sur une feuille de papier.
Ce n'est qu'après cette introduction que des exercices sur papier où il faut repérer des points alignés parmi un ensemble de points (en les coloriant d'une même couleur par exemple) ou placer des points alignés avec des points donnés peuvent être proposés aux élèves. La désignation des points par des lettres ne relève pas du cycle 2.
La reconnaissance d'alignements de points peut également être travaillée avec les élèves dans des activités de reproduction de figures (voir ci-après).

Reproduction de figures sur quadrillage

Ce type d'activités, présent dans la plupart des manuels, semble bien connu. Toutefois, de nombreux auteurs semblent sous-estimer les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves de cycle 2 relatives en particulier à la signification du mot « reproduire » et à la prise de repères sur un quadrillage, plus ou moins difficile suivant les modèles à reproduire.
C'est au début du cycle 2 que l'idée de reproduction peut être travaillée en rapport avec l'introduction du moyen de validation qu'est le calque. Le professeur donne aux élèves un modèle simple sur calque quadrillé (dont les contours suivent les lignes du quadrillage), fixé sur la table à côté d'eux et leur propose de reproduire le modèle, c'est-à-dire de réaliser un dessin « pareil », en précisant : « Ensuite, nous superposerons le calque pour voir si votre dessin est bien exactement pareil que le modèle. »
Certains enfants reproduisent une forme générale, qui peut s'appuyer ou non sur les lignes du quadrillage mais dont les mesures sont approximatives, d'autres sont capables de prendre des repères en comptant les carreaux mais il reste des problèmes de décompte aux « coins », qui font que si la figure est un peu grande, ils ne s'aperçoivent pas qu'ils n'ont pas complètement respecté la taille.
C'est en s'appuyant sur ces différentes productions que dans une mise en commun, le professeur précise ce qui est attendu : les tracés doivent suivre les lignes du quadrillage et les côtés se superposer. C'est peu à peu que les élèves deviennent capables d'élaborer des démarches, en particulier si la validation finale avec le calque est précédée d'une phase d'échanges entre élèves. À ce moment, des enfants voisins échangent leurs productions et doivent prévoir ce qui va se passer au moment de la superposition. Certains arguments échangés peuvent ensuite être utilisés comme moyens de contrôle au cours de nouvelles réalisations.
Au CE1, des figures plus complexes peuvent être proposées, comme dans l'exemple ci-après.

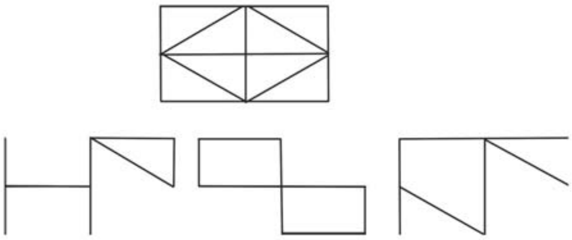


Deux niveaux de difficulté sont à prendre en compte :
– niveau 1 ; le segment coupe les lignes du quadrillage aux nœuds du quadrillage. Il suffit alors de compter le nombre de carreaux « en diagonale » pour déterminer ce segment : trois carreaux pour le segment A du dessin précédent ;
– niveau 2 ; les deux extrémités du segment sont des nœuds du quadrillage, mais le segment coupe les lignes du quadrillage en d'autres points que les nœuds. La procédure précédente n'est plus très efficace. Une procédure possible consiste à repérer les nœuds des deux extrémités du segment, puis un nœud intermédiaire, situé à l'intersection de l'horizontale passant par une extrémité et de la verticale passant par l'autre extrémité et à compter alors deux fois un nombre de carreaux (par exemple, « déplacement » horizontal de deux carreaux vers la droite, puis vertical de trois carreaux vers le haut pour le segment B sur le dessin précédent). Mais cette procédure n'émerge pas facilement au CE1. Ce sont les confrontations entre élèves, à propos des difficultés rencontrées, qui permettent la diffusion dans la classe de cette procédure que seuls quelques élèves sont capables d'inventer. Pour que tous se l'approprient il est nécessaire de multiplier ce type d'activités, sans augmenter la complexité des figures (la reproduction d'un triangle dont aucun côté n'est porté par une ligne du quadrillage est une tâche suffisante en fin de cycle 2).

Reproduction de figures sur papier uni

Ces activités nécessitent l'analyse préalable de la figure à reproduire pour en repérer certaines propriétés et, lorsque la reproduction est amorcée, pour identifier les éléments communs aux deux figures :
– longueur de côtés, angles droits ;
– alignements de points ;
– segments à prolonger.
C'est aussi l'occasion de développer la compétence à utiliser correctement une règle pour réaliser un tracé : position et maintien de la règle, tenue du crayon…

Exemple de figure fournie avec plusieurs reproductions amorcées :



Solides et figures planes

Au cycle 2, une première étude de certains solides et de certaines figures planes déjà manipulés par les élèves est conduite et permet une première mise en évidence de quelques-unes de leurs propriétés. Les problèmes posés doivent le plus souvent concerner des objets manipulables (solides, figures découpées) et, lorsque le travail concerne des figures dessinées, celles-ci doivent occuper des positions variées.

Superposabilité

La question de savoir si deux formes découpées et éloignées l'une de l'autre ou deux figures dessinées dans des positions différentes sont superposables ou non favorise une approche analytique des objets concernés : position relative des éléments qui les constituent, longueur de côtés, angles droits.

Des solides aux figures planes

Il peut être intéressant, au cycle 2, de partir de l'analyse de solides pour retrouver les figures planes, comme le montre cette séquence de travail pour la dernière année du cycle 2, avec une progression allant du cube au carré.

Étape 1
Matériel : des solides manipulables par les élèves, de même couleur mais de formes différentes (pavés, cubes, prismes, boules, cylindres, polyèdres non parallélépipédiques).
Chaque solide est repéré par une lettre, le professeur choisit l'un d'entre eux et inscrit sa lettre sur un papier. Les élèves, par groupes de quatre, doivent préparer des questions à poser au professeur pour retrouver quel est ce solide. Les réponses ne peuvent être que « oui » ou « non ». Questions et réponses sont écrites au tableau. Quand un groupe est sûr du solide, le professeur confronte leur réponse à ce qui est écrit sur le papier. Au bout de deux ou trois parties, c'est un des élèves qui peut choisir un objet en le montrant aux autres et le professeur qui pose des questions pour introduire le vocabulaire adéquat

et éventuellement certaines questions auxquelles les élèves peuvent ne pas avoir pensé. Puis l'activité est reprise ensuite comme au départ.

Étape 2

Matériel : une boule de terre à modeler pour chaque élève.
Les enfants sont invités à faire un cube. La plupart sont insatisfaits de leur construction ; l'enseignant leur demande pourquoi (« les faces ne sont pas plates, les coins ne vont pas, le cube est penché, etc. »), ce qui les conduit à préciser les caractéristiques du cube : faces planes, « coins » droits, régularités…

Étape 3

Matériel : si possible un cube par élève, tous les cubes n'étant pas de même taille ; du papier et des ciseaux.
Si la remarque n'en a pas été faite auparavant, le professeur pose la question : « Est-ce que toutes les faces du cube sont pareilles ? Comment en être sûr ? »
Des méthodes différentes sont expérimentées (empreinte d'une face, vérification que les autres faces ont la même empreinte, mesure des côtés…).
À l'issue de la mise en commun, tous les élèves dessinent puis découpent l'empreinte d'une face, la plupart des enfants y reconnaissent un carré, ce que confirme l'enseignant par la définition : un carré est une face de cube.

Étape 4

Elle a pour but de faire découvrir et expliciter par les élèves que le carré a quatre côtés de même longueur et également de mettre en évidence que respecter cette propriété n'est pas suffisant pour tracer un carré.
Matériel :
– un cube témoin (non disponible pour les élèves) ;
– une feuille sur laquelle est dessinée un « morceau » de carré correspondant à une face du cube précédent, un des côtés étant dessiné entièrement et l'autre seulement amorcé (voir ci-dessous) ;
– un double-décimètre ;
– des cubes dont les faces sont de dimension différente du carré à reproduire (à disposition des élèves).

Dans un premier temps, les élèves sont invités à formuler des remarques sur les propriétés du carré en réponse à la question : « Tout à l'heure, je vous demanderai de terminer le dessin d'un carré sur une feuille blanche. À quoi devrez-vous faire bien attention ? » Comme pour le cube, le professeur demande aux élèves de justifier leurs affirmations. Ayant déjà construit des carrés sur quadrillage, par opposition au rectangle, les élèves connaissent la propriété d'égalité des mesures des côtés qu'ils peuvent prouver là par mesure ou par pliage de leur carré de papier. Mais n'ayant pas eu jusqu'ici à contrôler les angles puisqu'ils sont donnés par le quadrillage, cette propriété n'apparaît pas.
Au CE1, tous les élèves ne réussissent pas la construction, par exemple les quadrilatères produits n'ont pas tous les côtés de même longueur ou d'autres qui vérifient cette propriété ne sont pourtant pas superposables aux faces du cube !
L'exploitation des productions se déroule en trois temps :
– débat autour des réalisations pour savoir si elles sont correctes ou non : certains arguments font allusion au non-respect de la longueur des côtés, d'autres à l'inclinaison des côtés adjacents (« trop penché, trop écarté… ») ;
– validation par superposition avec le cube témoin, ce qui permet de visualiser « ce qui ne va pas » ;
– formulation des propriétés qui doivent être respectées : longueur des côtés, « coins » droits (le terme « angle droit » peut être introduit) correspondant à ceux des faces des cubes remis aux élèves (qui pourront ensuite servir de gabarits).

Étape 5

Reprise de l'activité avec d'autres carrés à terminer (dont l'enseignant possède un témoin). Les élèves disposent du même matériel (cubes divers, doubles-décimètres).
Exemples de figures à compléter pour obtenir un carré (selon les compétences des élèves) :

Étape 6

Elle a pour objectif de renforcer chez les élèves la nécessité de contrôler les « coins » de la figure à tracer.
Matériel : pour chaque équipe, une dizaine de figures découpées dans du papier, de longueurs de côté différentes (carrés, losanges aux angles nettement différents de l'angle droit, losanges et rectangles proches de carrés).
Il s'agit de classer ces quadrilatères. La distinction rectangle/non-rectangle est facile, en référence à la comparaison des longueurs de côtés. Par contre, la classification des différents losanges amène des discussions : les losanges aux angles très différents de l'angle droit sont bien mis à part (« ils ont les coins pointus et larges »), mais pour les autres les avis sont partagés. Le professeur propose d'utiliser les cubes pour le savoir. Par superposition, les faux carrés sont alors reconnus, « leurs coins ne sont pas tous pareils » alors que c'est le cas pour les carrés.

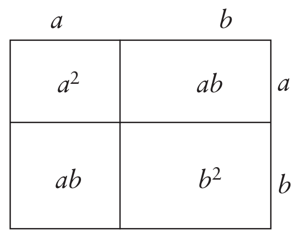
Grandeurs et mesure à l'école élémentaire

Au cycle 2, les élèves étudient la notion de longueur et sont sensibilisés à celles de masse et de temps. Ils commencent à appréhender la notion de volume par le biais de la contenance de certains récipients. Ils apprennent à mesurer longueurs, masses et durées et à repérer des dates ou des moments grâce aux calendriers et aux montres.
Au cycle 3, les activités proposées aux élèves se situent dans le prolongement de celles du cycle 2 : les élèves étudient donc les longueurs, les masses, les volumes (sous leur aspect contenance), les dates et les durées. Ils se familiarisent avec les aires. Ils approchent la notion d'angle.
Dans les deux cycles, le travail sur grandeurs et mesures est conduit en liaison avec les activités évoquées dans les rubriques « Découvrir le monde » et « Sciences expérimentales et technologie ».
Ce texte a pour objet de compléter les indications des documents d'application *Mathématiques, cycle 2* et *Mathématiques, cycle 3*, pour l'enseignement des « grandeurs et mesures » (cycle 2, page 29, et cycle 3, page 35). Il requiert une lecture préalable de ces documents.
L'attention des enseignants est également attirée sur le fait que certains mots sont utilisés en mathématiques avec un sens qui diffère de celui usuellement pratiqué, ce qui peut faire obstacle à la compréhension de la notion mathématique en jeu.

L'enseignement des grandeurs et de la mesure

L'importance de ce thème pour les apprentissages mathématiques

Les activités liées à la mesure font intervenir, en étroite imbrication, des notions géométriques et des notions numériques ; elles contribuent à une meilleure maîtrise des unes et des autres.
Par exemple, au cycle 2, la question de savoir quelle longueur de ruban reste disponible après avoir découpé, devant les élèves, un ruban de 37 cm dans un ruban de 50 cm, permet de renforcer le sens de la différence de deux nombres.
Au cycle 3, la résolution de problèmes de mesure de longueurs et d'aires aide les élèves à prendre conscience de l'insuffisance des entiers et de la nécessité d'introduire d'autres nombres : fractions, puis nombres décimaux.
Au collège les situations liées au calcul sur les longueurs, les aires et les volumes sont des supports privilégiés pour les apprentissages du calcul numérique (par exemple pour la multiplication de deux décimaux) et du calcul algébrique (distributivité de la multiplication sur l'addition, identités remarquables : par exemple $(a + b)^2$ est l'aire d'un carré de côté de longueur $(a + b)$: c'est donc la somme des aires de deux carrés et des aires de deux rectangles).



La connaissance de l'espace environnant passe souvent par le recours à des mesures : distance entre deux lieux (associée à la longueur du chemin qui joint ces deux lieux) ; superficie ou étendue (expression courante pour « aire ») d'une pièce à carreler ou à peindre ; volume d'un ingrédient en cuisine ; durée d'un film…
Les élèves doivent donc acquérir des connaissances et des compétences spécifiques relatives à différentes mesures. La construction de ces connaissances s'appuie sur un travail préalable sur les grandeurs auxquelles ces mesures sont associées.

Les grandeurs avant leur mesure

Il est possible d'associer diverses grandeurs à un objet, par exemple pour un objet cubique :
– une contenance (un volume) qui correspond à la quantité d'eau qui pourrait le remplir ;

– une masse qui dépend de la matière dont est constitué le cube ;
– les aires d'une face ou de toutes ses faces (qui correspondrait à l'aire de la surface minimale de carton nécessaire pour en faire un « patron ») ;
– des longueurs, celle d'une arête ou la longueur totale de ses arêtes (qui correspondrait à la longueur minimale de fil de fer nécessaire pour en faire un « squelette »).

L'aire totale du cube est la somme des aires des faces ; par contre la longueur totale des arêtes n'est pas la somme des périmètres des faces, comme le supposent beaucoup d'élèves. Seule une représentation fine de ce que représente chacune des grandeurs, longueur et aire, permet de comprendre cette erreur.

Le fait d'annoncer la bonne unité de mesure à la suite du nombre n'est pas suffisant pour que les élèves se représentent correctement une grandeur (par exemple pour qu'ils différencient aire et périmètre) : il est nécessaire qu'ils aient préalablement travaillé sur les propriétés de chacune de ces grandeurs (ici longueur et aire).

Les premières activités visent à construire chez les élèves le sens de la grandeur, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne. Le concept s'acquiert progressivement en résolvant des problèmes de comparaison, posés à partir de situations vécues par les élèves, suivis de moments d'institutionnalisation organisés par le maître. De tels problèmes amènent notamment à classer des objets : certains, pourtant d'apparences différentes, sont équivalents selon un critère déterminé, longueur, aire… ; ainsi un crayon peut avoir la même longueur qu'un stylo, mais il existe des crayons de longueurs différentes ; il suffit de les disposer côte à côte pour le constater. Les problèmes posés peuvent donner lieu à :
– des comparaisons directes : juxtaposition, superposition pour les longueurs, les angles ou les aires ; transvasements du contenu d'un récipient dans un autre pour les contenances ; soupesage ou utilisation de la balance Roberval pour les masses ;
– des comparaisons indirectes : recours à un objet intermédiaire (longueur servant de gabarit, masse fixée servant d'étalon) ou transformation de l'un des objets pour le rendre comparable à l'autre (par exemple, déroulement d'une ligne non rectiligne) ; découpage et recomposition d'une surface pour les aires…

Les élèves sont aussi habitués progressivement à anticiper mentalement les résultats des comparaisons avant de les valider par l'expérience.

Par exemple, pour comparer les aires et les périmètres des surfaces A, B et C construites à partir de carrés et de demi-cercles :
aire (figure B) = aire (figure A)
MAIS périmètre (figure B) > périmètre (figure A)
aire (figure B) ≠ aire (figure C)
MAIS périmètre (figure B) = périmètre (figure C)

Figure A. Figure B. Figure C.

Dans un second temps, les comparaisons amènent à pointer des rapports de grandeurs : il faut savoir que les élèves ont accès à la compréhension des relations entre grandeurs (égalités, inégalités, rapports simples) avant d'être capables de mesurer ces grandeurs. Ainsi il leur est facile, sans recourir à la mesure, de dessiner un crayon deux fois ou trois fois plus long qu'un autre. Il est souvent moins « évident » pour eux que l'aire de la figure A est le double de celle de la figure C ou que les figures A et B ont la même aire : une décomposition (suivant la ligne pointillée) puis une recomposition des figures permet de s'en convaincre.

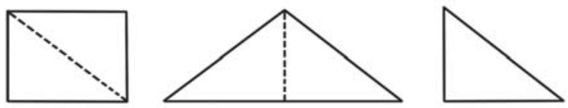


Figure A. Figure B. Figure C.

Ainsi, sans utiliser la mesure, il est possible de comparer des aires (et de vérifier que deux figures de formes différentes peuvent avoir la même aire) ou de trouver des rapports d'aires.

Le vocabulaire des grandeurs

Comme pour les autres domaines des mathématiques, l'enseignant doit exercer une certaine vigilance sur le langage utilisé pour évoquer les grandeurs. Le mot « grandeur » n'a pas à être utilisé en classe : il est remplacé par « longueur, masse, aire, etc. » selon le contexte.

Les mots du domaine des longueurs sont assez nombreux. Sans chercher à être exhaustifs, citons hauteur d'un monument, d'un arbre (par contre la hauteur du Soleil est un angle [1]) ; altitude d'un sommet, d'un avion en vol ; dénivelé d'une route ; profondeur d'une piscine, d'un placard ; taille d'une personne, tour de cou, tour de taille ; distance entre deux lieux, entre deux points ; largeur d'un fleuve, d'un rectangle ; périmètre d'un polygone ; circonférence d'un cercle… Il est important pour l'élève que tous ces mots, utilisés dans des contextes différents, se réfèrent au même concept, appelé en mathématiques « longueur ».

1. « Mouvement apparent du Soleil », in *Fiches connaissances, cycles 2 et 3*, CNDP, 2002, coll. « École », fiche 19, page 35.

Certains mots désignant des unités de longueur (mètre, décamètre, décimètre) sont aussi utilisés pour nommer un outil de mesure : mètre ruban, mètre de couturière, décamètre d'arpenteur, double-décimètre de l'élève.

Le mot « aire » est utilisé en mathématiques de préférence à celui de « surface ». Il doit être différencié de ses homonymes : l'air qu'on respire, l'air qu'on fredonne, l'aire de repos sur l'autoroute ou une aire géographique (toutes deux plutôt apparentées à une surface), l'ère (l'époque).

Dans le domaine des volumes, le terme « contenance » désigne un volume intérieur, les termes « contenance » ou « volume » peuvent être utilisés, tout en soulignant leur différence avec le volume du son (qui évoque son intensité) ou le volume posé sur l'étagère (le livre)…

À l'école primaire, le mot « masse » est considéré comme synonyme de « poids », comme dans le langage courant. Il est homographe de la masse, outil de l'ouvrier du bâtiment.

L'usage adapté du « bon mot » ne peut être exigé de la part de tous les élèves, mais l'enseignant doit veiller à utiliser correctement ce vocabulaire et engager les élèves dans des mises en relation comme, par exemple, rattacher au domaine des longueurs tous les mots qui l'évoquent.

Des grandeurs à leur mesure

Il est souvent commode, pour comparer toutes les grandeurs d'un même domaine, de les comparer à une grandeur particulière, bien choisie, dite « étalon ». On dit alors que « l'étalon mesure une unité ». Il devient dès lors possible d'associer à chaque grandeur un nombre, appelé « sa mesure relativement à cette unité ».

Remplacer une grandeur par un nombre présente un grand intérêt. En effet, il est alors possible :

– de communiquer sur la grandeur des objets grâce aux nombres rapportés à une unité ;

– de fabriquer un objet dont la grandeur est donnée par un nombre rapporté à une unité ;

– de comparer des objets selon une grandeur en leur attribuant un nombre ou en utilisant des encadrements entre deux nombres, ces nombres étant rapportés à une unité.

Dans certains cas, la mesure de la grandeur est obtenue à l'aide d'un mesurage, par report de l'étalon ou par utilisation d'un instrument. Ces deux actions correspondent à une prise d'informations directe sur l'objet.

Dans d'autres cas, la mesure est le résultat d'un calcul.

Il est souhaitable que les élèves apprennent à estimer la mesure avant de procéder au mesurage, soit à l'œil, soit en ayant recours à des gestes (parcourir le gymnase pour en estimer la longueur), soit à partir de longueurs connue, entre un et deux mètres (taille d'une personne), entre 10 et 25 cm (empan de la main), entre 4 et 5 mètres (dimension d'une pièce usuelle).

L'utilisation adaptée des instruments de mesure nécessite un apprentissage. La plupart du temps, la mesure est obtenue par lecture d'une graduation (instruments de mesure de longueur, cadran d'une balance graduée, graduations d'un verre mesureur…). Il est donc particulièrement important de comprendre le fonctionnement des instruments de mesure de longueur. C'est pourquoi nous développons plus particulièrement le thème des longueurs dans la seconde partie du chapitre (page 82).

Les élèves doivent être placés dans des situations de mesurage. Ces activités sont accompagnées d'une première réflexion sur le caractère approximatif de certains résultats.

Rappelons à ce sujet ce qui est écrit dans les documents d'application des programmes de mathématiques :

« Si la réflexion sur la précision des mesures est encore difficile au cycle 2, le maître sensibilise ses élèves à la difficulté de lire exactement une mesure. Par exemple, un segment prévu par le maître comme mesurant 5 cm ne pourra pas toujours être mis en correspondance parfaite avec le 0 et le 5 de la règle graduée en centimètre[2]. »

« Une réflexion sur la précision des mesures sera menée à l'occasion de chaque activité : il ne s'agit pas d'exiger une précision exemplaire, mais au contraire de faire prendre conscience des approximations liées à la taille des objets, à la précision des instruments et à leur utilisation. Souvent, cela se traduit par un intervalle de confiance, une “erreur maximum”. Par exemple, pour le mesurage d'un segment dont la longueur prévue est 4,8 cm, les longueurs de 4,7 cm, 4,8 cm et 4,9 cm sont jugées acceptables[3]. »

Les élèves doivent être confrontés à des problèmes où ils ont l'initiative de prélever des informations liées aux mesures, qui peuvent être données sous trois formes :

– sur des dessins à l'échelle 1, le prélèvement d'informations relève du mesurage. Ainsi pour déterminer le périmètre d'une surface polygonale dessinée sans indication de mesure, les élèves ont la responsabilité de prélever les longueurs nécessaires, l'enseignant veillant, en fin d'activité, à indiquer le périmètre avec un intervalle de confiance ;

– avec des dessins à une autre échelle précisée (par exemple, 1 cm représente 5 m), le mesurage seul ne suffit plus ; il faut faire intervenir des connaissances relatives à la proportionnalité ;

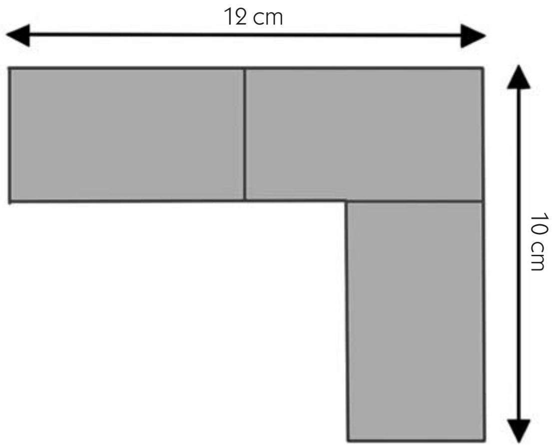
– des schémas cotés nécessitent d'abandonner le mesurage et d'apprendre à lire des informations

2. *Mathématiques, cycle 2*, *op. cit.*, page 30.

3. *Mathématiques, cycle 3*, *op. cit.*, page 35.

symboliques (codes d'égalité de longueurs, code d'angle droit) et textuelles.
Un travail spécifique est nécessaire pour apprendre à changer de points de vue selon le dessin proposé et à connaître certaines conventions. Il est important qu'en fin d'école primaire, les élèves ne considèrent pas qu'une mesure s'obtient uniquement à l'aide d'un mesurage effectif et qu'ils résolvent correctement le problème suivant.

Sophie a dessiné et colorié trois étiquettes rectangulaires toutes identiques sur une plaque de carton, comme le montre le dessin. La plaque est rectangulaire et a pour longueur 12 cm et pour largeur 10 cm.



a) Calcule la longueur réelle d'une étiquette. Écris tes calculs.
b) Calcule la largeur réelle d'une étiquette. Écris tes calculs.

Évaluation nationale de sixième, 2000.

Actuellement, à l'entrée en sixième, plus d'un élève sur cinq utilise son double-décimètre pour répondre, alors que, le support étant un schéma coté, la réponse s'obtient par déduction et calcul, ce qui souligne la nécessité d'un travail sur ce type de situation.

Le système métrique

Le système international (SI) d'unités est fixé par le Bureau international des poids et mesures (créé en 1875). Les unités de base du SI sont le mètre, le kilogramme et la seconde. Le litre est une unité dite d'usage courant.
Les définitions (et les symboles) des unités sont modifiés de temps à autre pour suivre l'évolution des techniques de mesure. Plus de renseignements sont disponibles sur www1.bipm.org/fr/bipm/metrology
Il est important que les élèves soient familiarisés avec la signification des préfixes les plus usités accolés à l'unité de référence :

kilo $\leftrightarrow$ 1 000 ; hecto $\leftrightarrow$ 100 ; déca $\leftrightarrow$ 10 ; déci $\leftrightarrow \frac{1}{10}$; centi $\leftrightarrow \frac{1}{100}$; milli $\leftrightarrow \frac{1}{1000}$,

et sachent s'y référer pour des conversions concernant les longueurs référencées au mètre, les masses référencées au gramme et les contenances référencées au litre.
Attention, pour les aires référencées au mètre carré (et les volumes référencés au mètre cube), la signification des préfixes n'est plus celle qui précède. Deux unités d'aire « voisines » (km^2, hm^2, dam^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2) ne sont plus dans un rapport 10 comme les unités de longueurs voisines (km, hm, dam, m, dm, cm, mm), mais dans un rapport 100. Cela est dû à la construction du système métrique : les unités d'aires du système international sont construites comme produits de deux longueurs. Ainsi :
1 décamètre^2 = (1 décamètre)^2 = (10 mètres)^2 = 10^2 mètres^2 = 100 mètres^2.
La puissance deux (au carré) affecte aussi le préfixe déca qui ne signifie plus 10, mais 10^2.
En revanche, pour des unités d'aire telles que are, hectare, centiare (dont la connaissance n'est pas exigible à l'école primaire, même si elles peuvent être utilisées), les préfixes conservent la signification qu'ils ont pour les unités de longueur. Ainsi :
1 hectare = 100 ares et 1 centiare = $\frac{1}{100}$ are.
Rappelons que 1 are = 100 m^2.
Les exercices de transformation de mesures par changement d'unités doivent rester raisonnables et reposer sur la mobilisation systématique de connaissances telles que 1 km = 1 000 m ; 1 m = 100 cm. Des questions du type « Combien y a-t-il de mm dans 5 km ? » (s'il s'agit par exemple de compter des pas de fourmis) ne doivent pas faire l'objet d'exercices systématiques : si elles sont posées, les élèves peuvent y répondre à l'aide de procédures personnelles.
Le tableau dit « de conversion des unités » ne doit pas être proposé avant qu'un certain nombre d'exercices de transformation de mesures ait permis aux élèves de prendre conscience des régularités dues à la compatibilité du système métrique avec l'écriture décimale numérique.

Le calcul sur les grandeurs

Aucune virtuosité sur les conversions d'unités n'est demandée. Au départ, les résultats des mesures peuvent être exprimés avec des expressions « complexes », c'est-à-dire utilisant plusieurs unités, par exemple 1 m 7 cm (ou 1 m et 7 cm). Ce choix est usuel dans les expressions liées à la monnaie, par exemple : 3 euros 20 centimes (ou 3 euros et 20 centimes) et plus encore aux durées : 2 h 50 min.
À la fin du cycle 3, lorsque l'utilisation des nombres décimaux se généralise, un travail est conduit sur l'égalité d'expressions comme 1 m 7 cm et 1,07 m.
Il est aussi intéressant de travailler avec les élèves sur des égalités comme 2 h 30 min = 2,5 h ou 2 h 15 min = 2,25 h : en effet, le passage de l'écriture

« complexe » à l'écriture décimale (et vice versa) résulte d'un apprentissage qui sera poursuivi au collège.

Donner comme mesure 1,5 pour la longueur d'un segment n'a pas de sens : il peut s'agir de 1,5 cm ou de 1,5 dm ou encore d'une autre longueur. Une longueur n'est parfaitement connue et définie que si on précise un nombre et une unité de longueur : par exemple 23 cm ou 230 mm ou encore 2,3 dm.

Il est donc légitime et correct d'écrire des égalités telles que :

1 m = 100 cm, 1 km = 1000 m.

1 h = 60 min.

23 cm = 230 mm, 23 cm = 2,3 dm, 23 cm = 230 cm = 2,3 dm.

Puisque les grandeurs considérées (longueurs, aires, volumes, durées, masses) peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée :

3 cm + 15 mm = 30 mm + 15 mm = 45 mm = 4,5 cm.

3 kg + 500 g = 3,5 kg = 3500 g.

4×37 cm = 1,48 m.

3 h 45 min + 1 h 28 min = 4 h 73 min = 5 h 13 min.

3×15 min = 45 min.

Plusieurs unités de grandeur peuvent donc coexister dans un calcul, qui n'est pas alors un calcul portant sur des nombres, mais un calcul portant sur des grandeurs.

Plus tard, l'élève maniera des égalités du type :

– pour l'aire de rectangles,

$4 \text{ m} \times 7 \text{ m} = 28 \text{ m}^2$

$8 \text{ m} \times 50 \text{ cm} = 8 \text{ m} \times 0{,}50 \text{ m} = 4 \text{ m}^2$;

– pour le périmètre d'un carré de 7 cm de côté,

4×7 cm = 28 cm ;

– pour une vitesse,

$\frac{156 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 78 \text{ km/h}.$

Longueurs, aires, dates et durées

Une insistance particulière sur les longueurs (cycles 2 et 3)

Longueurs

Des problèmes sur les longueurs peuvent prendre appui sur :

– des comparaisons de longueurs « corporelles » (tour de cou, tour de tête, taille…) qui se résolvent par comparaison directe ou utilisation d'une ficelle avant utilisation d'une toise, d'un mètre ruban pour en déterminer la mesure ;

– des comparaisons de longueurs de l'environnement, dont les supports ne sont pas nécessairement rectilignes : quel est l'arbre de la cour de plus grand tour (périmètre) ? Quel est le chemin le plus court entre ces deux endroits ?

– des comparaisons de longueurs de lignes brisées ou de lignes courbes dessinées sur une feuille : dans un premier temps, une bande de papier ou une ficelle suffisent pour conclure, dans d'autres cas le recours à la mesure est nécessaire.

Plus courte distance

Des problèmes de recherche de la plus courte distance entre deux lieux ou deux objets sont posés dès l'école primaire, même si une étude mathématique plus systématique relève du collège. Ils permettent en effet une appréhension spatiale de notions géométriques :

– si on recherche la plus courte distance entre deux lieux dans la cour de récréation ou entre deux points sur la feuille de papier, c'est le parcours (ou le tracé) rectiligne qui est la réponse au problème posé ;

– si on recherche la plus courte distance entre l'arbre et le mur dans la cour de récréation ou entre un point et une droite sur la feuille de papier, c'est le parcours (ou le tracé) rectiligne perpendiculaire qui est la réponse au problème posé.

De même, la recherche et le marquage de positions toutes à la même distance d'un mur ou d'une clôture rectiligne amènent au tracé « d'une droite parallèle » au mur ou à la clôture.

Périmètre

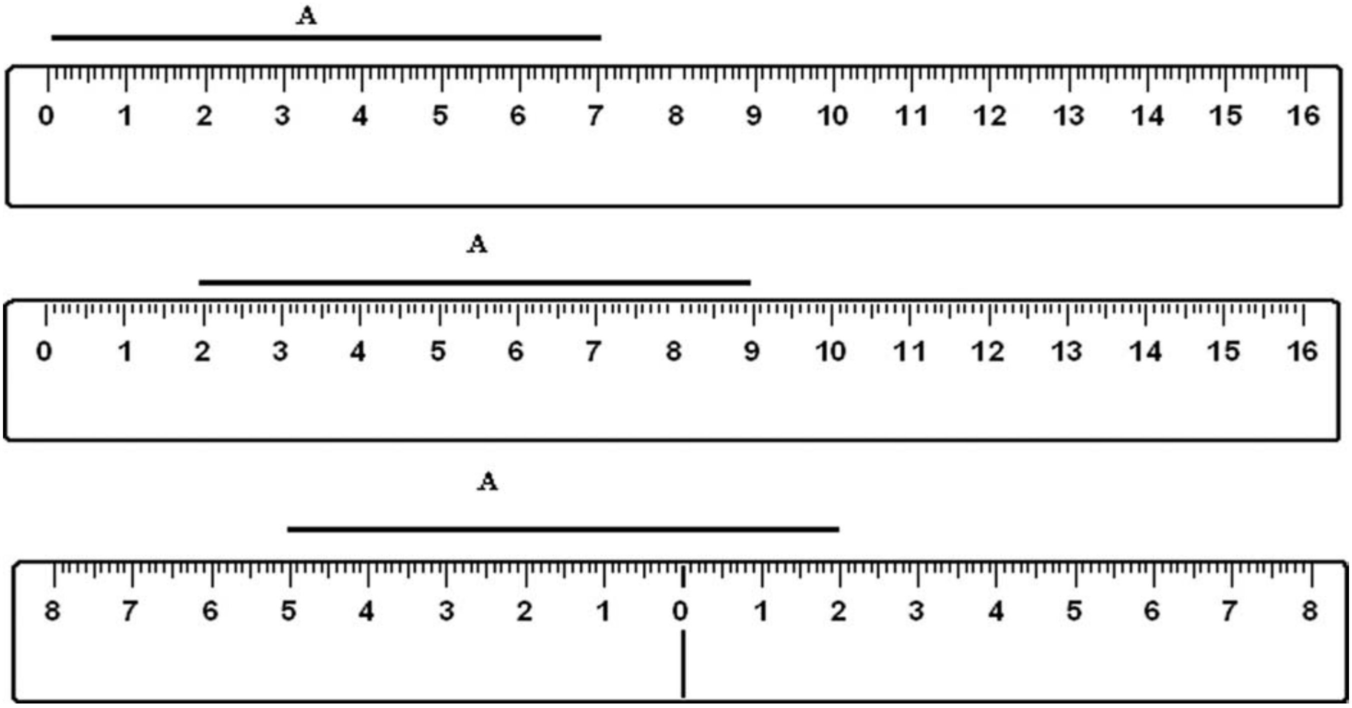
Le périmètre est une longueur particulière : dans un premier temps, les élèves doivent pouvoir comparer des périmètres, sans recourir à la mesure.

La mesure du périmètre d'un polygone ne nécessite pas de recours à une formule : c'est le sens du mot « périmètre » qui devrait permettre à l'élève de déduire la réponse à partir d'informations données ou prélevées sur l'objet étudié. La seule formule à mémoriser sera celle du périmètre du disque, apprise en sixième. Ainsi, plutôt que de donner la longueur du côté du carré dont il est demandé de trouver le périmètre, il est intéressant de laisser l'élève mesurer lui-même la longueur adaptée pour obtenir le résultat. Plusieurs stratégies sont possibles : mesurer chacun des côtés (avec l'éventualité de trouver des résultats différents) et additionner ; mesurer chacun des côtés en régulant les différences de résultats des mesures et additionner ; mesurer un seul côté et multiplier par quatre. La discussion sur les stratégies amène à revoir les propriétés du carré et à mettre en évidence celles qui permettent de minimiser les actions de mesurage. Le même travail peut se faire pour la longueur d'une ligne brisée dont on sait que plusieurs segments sont de même longueur ou pour le périmètre d'un rectangle.

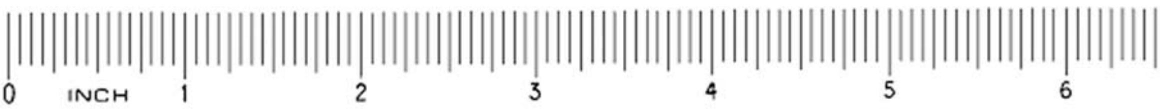
Graduation

La fabrication d'un instrument de mesure de longueurs soulève la question de sa graduation.

Pour graduer une bande de papier, il faut déterminer une origine, lui attribuer le nombre 0, reporter régulièrement une même longueur, appelée unité. Chaque report est en général matérialisé par un trait, chaque trait est affecté d'un nombre entier.
Mesurer une longueur avec la bande graduée revient à déterminer un écart, en nombre d'unités, entre les deux traits correspondants aux extrémités du segment de longueur cherchée. Pour une lecture rapide de la mesure, le trait de départ à privilégier est l'origine de la graduation.
Il est donc opportun de proposer aux élèves de :
– fabriquer des instruments de mesure de longueur : par exemple, au cycle 2 une toise graduée en décimètres ;
– trouver des mesures à l'aide d'instruments différents : par exemple des doubles-décimètres classiques, mais aussi des doubles-décimètres cassés (sans zéro apparent), des règles graduées avec zéro central ; ces activités permettent notamment de relier la donnée de la mesure à la bonne « lecture » des graduations et à la connaissance de l'unité de référence choisie par le constructeur.
Des situations de communication de mesure entre élèves (voir l'exemple de séquence, page 86), suivies d'une comparaison des instruments, sont particulièrement propices à cette prise de conscience.
Ainsi dans l'exemple qui suit, le segment A est repéré « de 0 à 7 » ou « de 2 à 9 » sur la règle ordinaire, et de « 5 à 2 » sur la règle symétrique. Mais la longueur du segment A est toujours 7 unités, écart entre les deux traits repères.



Il peut aussi être intéressant de mettre en concurrence dans la classe des bandes graduées en centimètres et d'autres en pouces pour souligner la nécessité de s'entendre sur l'unité utilisée pour communiquer.

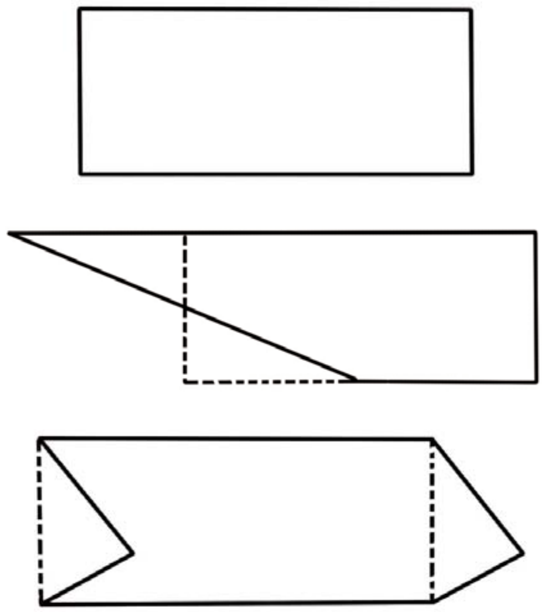


Une proposition de suite d'activités pour le cycle 3, visant le passage d'une approche de la longueur à sa mesure, est décrite à la page 86 à titre d'exemple. Elle met en évidence la richesse potentielle d'activités de communication pour faire prendre conscience aux élèves la nécessité d'adopter des conventions de mesure et l'utilité de disposer d'instruments adéquats.

Les aires

Les aires sont essentiellement étudiées au cycle 3. La progression, qui se poursuit au collège, suit la même dynamique que celle utilisée pour les longueurs : d'abord des travaux de comparaison, puis un passage à la mesure par le choix d'un étalon, suivi d'une familiarisation avec certaines unités du système international.

Un premier temps doit être consacré à des activités de comparaison d'aires. Il s'agit de comparer des surfaces planes selon leur étendue. Ces surfaces peuvent être soit dessinées sur une feuille de papier uni, avec la possibilité de les découper, soit matérialisées par des objets peu épais (pièces de Tangram, par exemple). Il s'agit :
– des surfaces d'aires très différentes ; la superposition (mentale ou effective) permet de constater que « l'une est beaucoup plus étendue que l'autre » ;
– des surfaces d'aires égales, l'égalité pouvant être vérifiée par superposition directe ;
– des surfaces d'aires égales, mais qui ne sont pas superposables directement : des découpages et des réagencements (effectifs ou mentaux) sont alors nécessaires pour constater l'égalité des aires.
Plusieurs exemples ont déjà été utilisés dans les pages précédentes ; en voici d'autres :

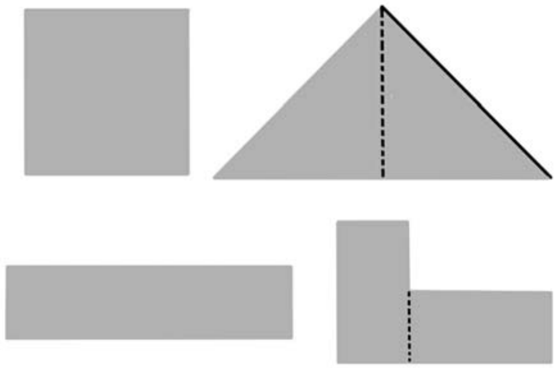


La variété des procédures qui permettent de comparer des surfaces « quant à leur étendue » aide la construction chez l'élève de la relation « avoir même aire ».
Un réinvestissement intéressant consiste à demander aux élèves de fabriquer, sur papier uni ou par découpage et juxtaposition avec du ruban adhésif, des surfaces de même aire qu'une surface de référence, mais ayant des formes différentes, puis d'expliquer comment ils ont trouvé et pourquoi ils sont sûrs de la validité de leurs propositions. Le travail peut se poursuivre avec des surfaces d'aire double ou triple.
Un second temps peut être consacré à la comparaison d'aires de surfaces dessinées sur papier quadrillé. Pour cette activité il est bon de se limiter à des contours suivant les lignes ou les diagonales du quadrillage. Les procédures précédentes restent valables, enrichies par la possibilité de compter le nombre de carreaux « occupés » par les surfaces et de comparer les mesures en « carreaux ». Cette procédure devient la plus efficace s'il s'agit de transmettre par écrit, sans dessin, des informations permettant à un autre élève de fabriquer, sur quadrillage, une surface de même aire (mais pas nécessairement de même forme) qu'une surface de référence donnée sur un quadrillage identique. L'élève qui déclare la surface X fait 17 carreaux et demi a basculé du côté de la mesure. La conclusion de l'enseignant peut être la suivante : « Si je décide que l'aire d'un carreau est 1 unité d'aire, alors je peux dire : "La surface X mesure 17 unités et demi [ou 17,5 unités ou $(17 + \frac{1}{2})$ unités]." »

Ce peut être aussi l'occasion, notamment pour les surfaces dont les contours suivent exactement les lignes du quadrillage, de se rendre compte que :
– deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre ;
– deux surfaces de même périmètre n'ont pas nécessairement la même aire ;
– on peut fabriquer des surfaces de même aire qu'un rectangle fixé R et de périmètres plus grands ou plus petits que celui de R ;
– on peut fabriquer des surfaces de même périmètre qu'un rectangle S et d'aires plus grandes ou plus petites que celle de R.
En revanche, la détermination systématique d'un encadrement pour l'aire d'une surface dont les bords ne sont pas rectilignes relève du collège (notamment à l'aide de deux surfaces polygonales, l'une intérieure à la surface de départ, l'autre extérieure).

N.B. – La mesure du périmètre s'exprime en unités de longueur, cette unité de longueur étant par exemple la longueur d'un côté de carreau du quadrillage. La mesure de l'aire s'exprime en unités d'aire, cette unité d'aire étant par exemple l'aire d'un carreau du quadrillage. Un abus de langage usuel, mais à éviter, consiste à décrire longueur et aire avec la même unité : le carreau.

Des « formes différentes » pour le décimètre carré : les unités les plus usuelles pour l'écolier sont le centimètre carré et le décimètre carré. Pour aider les élèves à distinguer surfaces et aires, les surfaces associées à ces unités (notamment) au décimètre carré doivent être diverses. S'il est certes naturel de définir le décimètre carré comme l'aire d'un carré d'un décimètre de côté, il est souhaitable d'inviter les élèves à construire d'autres surfaces de formes différentes dont ils sont sûrs que l'aire est aussi égale à un décimètre carré.
Voici une liste non exhaustive de surfaces d'aires égales obtenues par « décomposition et recomposition sans perte d'aire » d'un carré.



Contrairement aux longueurs, masses et volumes, il n'existe pas d'instrument usuel de mesure directe des aires. La mesure d'aires résulte très souvent d'un calcul, réalisé à partir d'une formule. La connaissance de l'aire du rectangle (seule exigible en fin d'école primaire) est importante car elle permet d'en déduire l'aire de nombreuses autres surfaces : triangle rectangle, triangle, losange, parallélogramme, notamment par transformation de la surface à étudier en un rectangle (ou un demi-rectangle) de même aire. Mais ceci est un apprentissage qui relève du collège.

Les dates et les durées

Deux catégories de questions sont liées à la notion de temps :
– se repérer dans le temps ; d'abord par rapport à des événements familiers (avant le repas, après la sieste, avant le mercredi), ensuite par rapport à des repères conventionnels et en utilisant les nombres. Les dates du calendrier sont organisées grâce à un repère linéaire avec une origine culturellement fixée (le début de l'ère chrétienne, l'hégire…). L'heure (légale) est une « date à l'échelle de la journée solaire » ;
– évaluer des durées, c'est-à-dire mesurer un intervalle de temps (intervalle entre deux dates ou deux moments) ; ce qui nécessite le choix d'une unité. Les durées peuvent s'additionner et se soustraire, au même titre que les longueurs, les aires, les volumes. Les durées, contrairement aux dates et heures, sont identiques partout sur la Terre.

Lecture de l'heure

Deux types d'affichage sont disponibles pour lire l'heure ; l'affichage analogique donné par les positions de deux aiguilles sur un disque (montre à aiguilles, horloge traditionnelle) et l'affichage digital donné par deux nombres à deux chiffres séparés par deux points (montre digitale).
L'affichage digital ne présente pas de difficulté particulière de lecture, pour peu qu'on ait compris la nécessité de lire deux nombres juxtaposés. Mais cette lecture seule ne permet pas de travailler le fait qu'une heure est égale à soixante minutes. À l'école, la lecture analogique sur montre à aiguilles et pendule doit donc être privilégiée.
Une pendule est un repère complexe pour de jeunes enfants : c'est la superposition de deux cadrans gradués différemment, celui des heures et celui des minutes. Le cadran des heures est gradué régulièrement de une heure en une heure, de un à douze, le douze correspondant aussi au zéro. Le cadran des minutes est gradué régulièrement de cinq minutes en cinq minutes, de cinq à soixante. Ces nombres-là ne figurent pas nécessairement sur le cadran de la pendule, il faut les inférer à partir des graduations des heures. C'est pourquoi l'apprentissage de la lecture de l'heure s'étale du cycle 2 au cycle 3. Une condition nécessaire est la présence dans la classe d'une pendule analogique en état de fonctionnement, l'idéal au cycle 2 serait qu'elle soit graduée de un à douze.
Au cycle 2, il est intéressant :
– de travailler sur un cadran des heures (avec une seule aiguille) et de sensibiliser à la notion d'intervalles : il est pile trois heures (une seule position de la petite aiguille) ; il est pile quatre heures (une seule position de la petite aiguille) ; il est entre trois heures et quatre heures (de nombreuses positions de la petite aiguille) avec des précisions du type il est plus près de trois heures ou il est plus près de quatre heures (pour habituer au sens conventionnel de rotation des aiguilles) ;
– de faire prendre conscience, après de multiples observations, de la simultanéité suivante : quand et pour que la petite aiguille passe de trois exactement à quatre exactement, la grande aiguille doit faire un tour complet (parte de douze et revienne à douze) : un tour complet de la grande aiguille dure une heure.
Au cycle 3, ces apprentissages sont poursuivis. Progressivement est abordée la lecture de positions particulières intermédiaires : trois heures un quart, trois heures et demi, trois heures trois quarts (aussi lu quatre heures moins le quart). À cette occasion il est profitable d'utiliser le cadran des minutes et de faire colorier la zone balayée par la grande aiguille de douze à trois (un quart d'heure) ; de douze à six (une demi-heure) ou de douze à neuf (trois quarts d'heure). C'est aussi l'occasion de les familiariser avec des angles qui sont des fractions simples de tour (et des durées fractions simples d'heure).
Le cadran des minutes peut aussi être un support à l'énoncé des multiples de cinq, depuis cinq (aiguille sur le un) jusqu'à soixante (aiguille sur le douze). C'est ainsi que les élèves parviennent à comprendre qu'un tour complet de la grande aiguille dure soixante minutes ou une heure.
Au cycle 3, en liaison avec l'astronomie, les élèves sont amenés à comprendre que, suite à la rotation de la Terre autour du Soleil, l'heure (légale) n'est pas identique partout sur la Terre [4].

4. *Enseigner les sciences à l'école, cycle 3*, CNDP, 2002, coll. « École », pages 29-46.

Calcul sur les durées

Une bonne compréhension de l'affichage analogique permet aussi de calculer de façon réfléchie sur les durées. Une « vraie » horloge analogique permet d'illustrer le calcul de sommes ou de différences de durées par déplacement effectif des aiguilles et décompte des minutes. Les techniques automatisées (calcul posé en colonne) pour les additions ou les soustractions de durées n'ont pas à être étudiées. Un calcul réfléchi est aussi rapide et souvent plus efficace. Ainsi la somme de 4 h 57 min et 2 h 38 min est égale à 6 h 95 min qui devient 7 h 35 min : le premier calcul n'est qu'une simple addition, la seconde transformation résulte de la connaissance de l'égalité 1 h = 60 min.

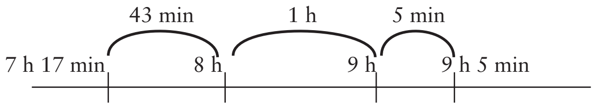
Comme dans d'autres domaines, les différences à calculer peuvent correspondre à des problèmes variés, par exemple :

– déterminer une durée (écart entre deux dates ou entre deux « heures ») : combien de temps dure le trajet d'un train qui part à 7 h 17 et arrive à 9 h 5 ? (il est à noter que la mention des minutes et du zéro intermédiaire est souvent omise) ;

– quantifier la comparaison de deux durées : quelle différence de temps de parcours entre deux trains si le premier met 7 h 17 min et le second 9 h 5 min ?

Dans les deux cas, des stratégies diverses de calcul réfléchi amènent au résultat, certaines étant plus « naturelles », compte tenu du problème posé :

– l'utilisation d'une ligne numérique dessinée (ou virtuelle) suivie du calcul des écarts avec des appuis « faciles », par exemple pour le premier problème :



soit 1 h 48 min

Un exemple de séquence sur les longueurs (fin de cycle 2, début de cycle 3)

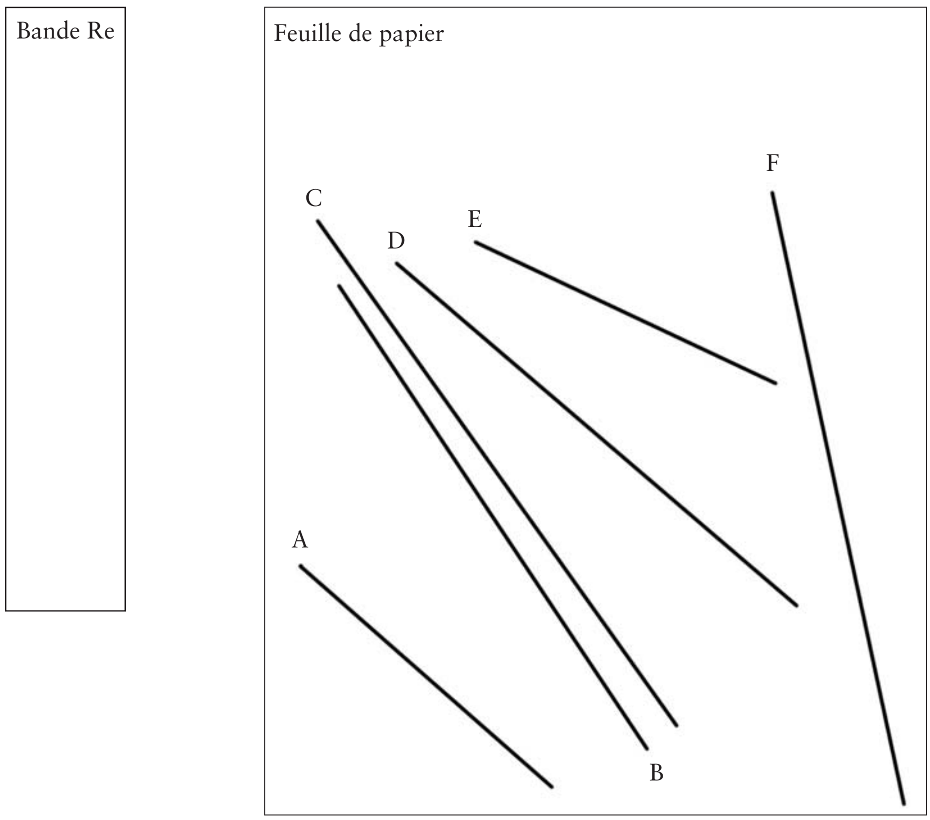
La séquence proposée est conçue pour que les questions posées par l'enseignant puissent être insérées dans un dispositif qui amène l'élève à s'engager dans l'activité et lui permette de pouvoir contrôler les résultats de son action.

Matériel à préparer, pour chaque élève (ou groupe de deux, voire trois élèves) :

– une bande de papier référence appelée Re (pour chaque séance), qu'il marque à son nom personnel ou de groupe ; tous les élèves n'ont pas des bandes Re de même longueur, il en existe par exemple quatre de longueurs différentes dans la classe (en accord avec les quatre longueurs de la feuille ci-dessous) ;

– une longue bande L, par exemple en carton, qu'il est interdit de découper ;

– une copie de la feuille (ci-dessous) sur laquelle sont dessinés plusieurs segments marqués de A à F.



Séance 1

La tâche des élèves est de trouver un moyen de savoir quels segments de la feuille ont la même longueur que Re, sans disposer simultanément de la feuille et de la bande Re.

La stratégie attendue est qu'ils pensent à reporter la longueur de Re sur la bande L pour en conserver la mémoire.

– Dans le premier temps les élèves disposent de Re et de la longue bande L (qu'il est interdit de découper) ; la feuille (avec les segments A à F) n'est pas disponible. La consigne pourrait être la suivante : « Tout à l'heure je vous donnerai une feuille [le maître la montre] sur laquelle vous devrez retrouver les segments de même longueur que votre bande Re. Attention je ne vous donnerai la feuille que si vous me rendez Re. Réfléchissez à un moyen pour réussir. Vous pouvez écrire sur la bande L, mais vous ne pouvez pas la découper. »

Les procédés utilisés pour la réussite sont souvent le marquage sur la bande L des extrémités de Re soit au bord, soit au centre de la bande L.

– Dans un second temps, le maître reprend Re (marqué au nom de l'élève ou du groupe) et donne la feuille (avec les segments A à F). La consigne est : « Cherchez quels segments de la feuille ont même longueur que votre bande Re. »

– Dans le troisième temps, Re et la feuille sont simultanément disponibles pour que les élèves vérifient leur résultat par superposition directe.

– Le quatrième temps est consacré à une mise en commun puis à une synthèse.

Le maître conclut avec les élèves : « Pour comparer deux longueurs, je peux reporter l'une sur l'autre à l'aide d'une bande de papier. »

– Un cinquième temps est prévu pour un réinvestissement et un entraînement, par exemple avec des exercices individuels de comparaison de longueurs de segments et de reports de longueurs d'un recto au verso d'une feuille.

Le compas peut alors être proposé comme un instrument remplaçant la bande L : le groupe de mots « ou à l'aide d'un compas » est alors ajouté dans le cahier au résumé ci-dessus.

Séance 2

Matériel à préparer par élève (ou groupe de deux) : une bande courte C, la même pour tous ; une nouvelle bande Re, telle que chaque bande Re mesure toujours un nombre entier de fois la longueur de C ; une demi-feuille blanche.

La tâche des élèves, émetteurs dans un premier temps, est d'écrire un message permettant à un groupe récepteur du message de dessiner un segment de même longueur que la bande Re de l'émetteur. Les élèves (ou groupes de deux) sont associés en équipes de deux élèves (ou deux groupes) de façon à ce que, lors de l'échange des messages, l'élève (ou le groupe) donne son message à l'élève (ou au groupe) dont il reçoit le message : ainsi les confrontations se feront par équipes (de deux ou de quatre élèves selon les modalités de départ).

L'apprentissage visé est l'utilisation de la bande C comme étalon pour décrire la longueur de la bande Re, donc le report d'un étalon pour indiquer une longueur et l'introduction de la mesure.

Cette situation de communication écrite entre élèves consiste :

– dans un premier temps, à écrire un message sans dessin avec du texte ;

– dans un second temps, après échange des messages entre groupes n'ayant pas la même bande Re, à dessiner le segment correspondant au message reçu ;

– dans un troisième temps, à confronter, par équipe, les deux segments dessinés aux deux bandes originales ;

– dans un quatrième temps, l'enseignant recense les messages écrits, fait discuter de leur efficacité, conclut par l'intérêt d'écritures du type : Re = 3C ou Re mesure comme 3C ;

– un cinquième temps, pour le réinvestissement, est consacré au mesurage de longueurs données et au traçage de segments de longueurs fixées de type 4C ; 7C ; entre 4C et 5C…

Séance 3

Matériel à préparer par élève (ou groupe de deux) : une bande courte C (la même pour tous) ; une bande Re telle que Re mesure toujours un nombre entier de fois C ; une bande graduée avec l'unité de longueur C.

Les élèves (ou groupes de deux) sont associés par deux, en équipes.

Un scénario du même type que celui de la séance 2 est mis en place, mais l'enseignant annonce qu'en plus le temps donné pour l'émission du message sera très court. Certains élèves réinvestiront la méthode du report de l'étalon C (mais cette méthode peut être longue surtout si Re mesure plus de 6C), d'autres utiliseront la bande graduée qui permet en une fois de trouver la longueur, à condition de bien la juxtaposer à Re et de déduire la mesure de la longueur.

L'apprentissage visé ici est le renforcement du report d'unité, mais aussi le « repérage » de la longueur sur un instrument gradué.

Séances suivantes : quelques idées

Il s'agit de reprendre le principe de la séance 3 en variant les instruments disponibles.

La tâche des élèves est de passer une commande écrite pour fabriquer un ou des rubans de même longueur qu'une ou des bandes de référence. C'est le maître qui délivre le ruban commandé.
Matériel à préparer par élève : une bande Re ; une demi-feuille pour la commande, des « instruments de mesure » différents à choisir par l'enseignant. Par exemple :
– instruments a : une bande unité 1 cm et une bande graduée en cm ;
– instruments b : une bande graduée en cm et un double-décimètre ;
– instruments c : un double-décimètre et une bande graduée en unités de 1,5 cm.
L'apprentissage visé est l'utilisation de la règle usuelle pour connaître une mesure et la nécessité d'expliciter soit l'instrument utilisé soit l'unité de longueur.
Les instruments autorisés influent sur l'efficacité des stratégies.

Articulation école/collège

Les nouveaux programmes pour l'école primaire (2002) sont entrés en vigueur à la rentrée 2004 pour la dernière année du cycle des approfondissements (ancienne classe de CM2). Ce chapitre a pour objet de préciser, pour les enseignants du cycle des approfondissements de l'école primaire et pour ceux du collège, les aspects les plus significatifs à prendre en compte pour aider à une bonne articulation entre école primaire et collège. Il peut, en particulier, être utilisé dans des actions de formation impliquant des enseignants de ces deux niveaux.

Le document d'application associé aux nouveaux programmes précise les contenus travaillés au cycle 3 et en sixième, en particulier quant aux niveaux d'appropriation attendus pour les notions travaillées à ces deux étapes de la scolarité. Le programme de sixième peut donner l'impression que rien de vraiment nouveau n'y est enseigné. En réalité, les notions communes aux programmes de l'école primaire et du début du collège ne sont pas envisagées avec les mêmes objectifs : certaines, en cours de construction au cycle 3, sont approfondies et consolidées en sixième ; d'autres, comme la proportionnalité, font l'objet d'une première approche au cycle 3 dans le cadre de la résolution de problèmes et sont ensuite progressivement formalisées et généralisées tout au long du collège.

Au cycle 3, puis au collège, les connaissances mathématiques deviennent des outils disponibles et mobilisables pour traiter des situations d'autres champs disciplinaires : sciences expérimentales, technologie, géographie… À l'école élémentaire, le travail avec un maître unique favorise ces mises en relation. Au collège, des échanges entre les professeurs de différentes disciplines sont nécessaires pour permettre de saisir les opportunités offertes par d'autres domaines et pour se tenir informés sur l'utilisation qui y est faite de notions mathématiques, notamment lorsqu'elles sont introduites pour les besoins propres de ces domaines.

Une place centrale pour la résolution de problèmes

À l'école primaire, comme au collège, la résolution de problèmes est placée au centre de l'activité mathématique des élèves. Les deux programmes mettent l'accent sur les mêmes objectifs et proposent des compétences voisines, par exemple :

– « capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver » au cycle 3 et « capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive » en sixième ;
– « faire des hypothèses et les tester » au cycle 3 et « conjecturer un résultat » en sixième ;
– « argumenter à propos de la validité d'une solution » au cycle 3 et « bâtir une argumentation » en sixième ;
– « vérifier les résultats obtenus et formuler une réponse dans les termes du problème » au cycle 3 et « contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié » en sixième.

Au cycle des approfondissements, comme au collège, la résolution de problème permet la construction et l'appropriation de nouvelles connaissances et favorise la compréhension des notions et des techniques. Le programme du cycle 3 précise : « La résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées : nombres entiers et décimaux, calcul avec ces nombres, approche des fractions, objets du plan et l'espace et certaines de leurs propriétés, mesure de quelques grandeurs. » Le domaine numérique n'est donc pas le seul concerné.

À l'école primaire, différents types de problèmes sont identifiés, avec des fonctions différentes :

– les problèmes d'application et de réinvestissement sont destinés à permettre l'utilisation des connaissances ;
– les problèmes « complexes » offrent l'occasion de mobiliser plusieurs connaissances mathématiques dans des situations proches de la vie de l'élève, effectivement vécues par la classe ou en relation avec d'autres domaines de savoir ; ces problèmes demandent aux élèves d'organiser une démarche raisonnée, de poser des étapes intermédiaires, de programmer des calculs, des constructions ;
– les problèmes de recherche, pour lesquels les élèves ne disposent pas de solution experte ont pour objectif le développement d'une attitude de recherche et/ou la construction d'une nouvelle connaissance.

La même classification peut être retenue pour le collège, en précisant que selon le moment où il est proposé aux élèves, un même problème peut avoir l'une ou l'autre des fonctions indiquées.

Sur le long temps de l'apprentissage, ces problèmes sont d'abord résolus à l'aide de procédures personnelles, avant d'être résolus par des procédures expertes.

Premier exemple

« Avec 385 roses, on veut réaliser des bouquets tous composés de 16 roses. Combien de bouquets peut-on réaliser ? »

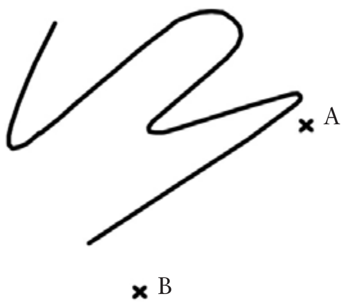
Ce problème peut être résolu en début de cycle 3 :

– par soustractions successives : 385 – 16 = 369, 369 – 16 = 353, puis 353 – 16 = 337, et ainsi de suite jusqu'à 17 – 16 = 1 ; on a effectué 24 opérations qui correspondent à 24 bouquets ;

– par un raisonnement du type : avec 160 roses, on fait 10 bouquets, donc avec 320 roses, on fait 20 bouquets et comme 385 – 320 = 65, on peut faire 4 bouquets de plus, la réponse est 24 bouquets.

La procédure experte pour résoudre ce type de problème (utilisation de la division euclidienne), devient disponible en fin de cycle 3 et doit être consolidée en sixième. Elle permet en particulier des problèmes dans lesquels les données numériques sont plus complexes que dans les exemples évoqués.

Deuxième exemple



« Placer sur la ligne donnée, le centre d'un cercle passant par les deux points A et B » est un problème de recherche au cycle 3. En sixième, après étude du cercle et de la médiatrice, il peut être utilisé comme problème complexe. Il devient un exercice de réinvestissement en quatrième.

Troisième exemple

En fin de cycle 3 ou en début de sixième, « trouver l'aire d'un rectangle de dimensions décimales simples (2,5 cm et 3,2 cm) » est un problème de recherche : cette aire peut être déterminée par comptage d'unités d'aire et de fractions d'unité, après avoir réalisé un pavage du rectangle ou en recourant à un changement d'unités de longueur pour se ramener à des dimensions entières, ou encore en décomposant le rectangle en deux rectangles accolés de dimensions respectives 2 cm sur 3,2 cm et 0,5 cm sur 3,2 cm et en utilisant le fait que $0{,}5 = \frac{1}{2}$. Le recours à la multiplication de deux décimaux sera la solution experte attendue en fin de sixième.

Les mêmes types de problèmes peuvent donc être proposés à l'école et au collège ; ce sont les procédures de traitement qui évoluent.

Les contenus, les compétences

Exploitation de données numériques

Cet intitulé, nouveau dans les programmes de l'école primaire, ne recouvre pas exactement le même champ d'activités que celui du collège dont le titre est « Organisation et gestion de données. Fonctions ». Il correspond au travail sur les problèmes dans lesquels les nombres et le calcul interviennent comme outils pour organiser, prévoir, choisir, décider, à travers trois rubriques :

– problèmes relevant des quatre opérations ;

– proportionnalité ;

– organisation et représentations de données numériques.

À la fin du cycle 3, l'objectif visé est que les élèves soient capables de reconnaître et de résoudre la plupart des problèmes qui peuvent être traités par une seule opération. Cependant, à l'entrée en sixième, un nombre important d'élèves rencontrent encore des difficultés, en particulier lorsque la division est en jeu. À l'école primaire, les situations dites « de division » sont traitées par des procédures diverses selon la représentation que s'en fait l'élève : addition ou soustraction réitérée, essais de produits, produits à trous, suites de multiples, division. L'étude de cette opération étant programmée sur plusieurs années, cet apprentissage se poursuit donc en sixième, le recours direct à la division devant devenir plus systématique. Plus généralement, le travail sur le sens des opérations doit être poursuivi au collège, en se référant à des typologies de problèmes qui permettent d'en apprécier la difficulté. La résolution de « petits problèmes » qui peuvent être résolus par le seul calcul mental est pour cela un moyen efficace.

À l'école primaire, on n'étudie pas la proportionnalité pour elle-même, mais on la fait fonctionner comme « outil ». Les élèves sont confrontés à de nombreux problèmes qu'ils résolvent en utilisant des raisonnements appuyés implicitement sur des propriétés de la proportionnalité :

– les propriétés de linéarité sont celles qui sont le plus souvent utilisées : idée de « fois plus » (si j'achète trois fois plus d'objets, je paierai une somme trois fois plus importante…) ;

– le coefficient de proportionnalité est également utilisé, en particulier dans le cas où est mise en jeu une relation entre grandeurs de même nature : mélanges (cinq fois plus d'eau que de sirop), agrandissement ou

réduction de figures et échelles (les dimensions sur le papier sont cent fois plus petites que dans la réalité). Des situations où ces types de raisonnement ne fonctionnent pas sont également proposées (situations de non proportionnalité). La notion de proportionnalité, à la fin de l'école primaire, est donc liée au fonctionnement de certains types de raisonnements contextualisés, appuyés sur l'une des deux propriétés précédentes. Dans cette optique, la reconnaissance d'une situation de proportionnalité n'est pas préalable à sa résolution : elle intervient au cours même de son traitement.
Les situations mettant en jeu les notions de pourcentage, vitesse, échelle ou encore des changements d'unités relèvent de la même approche à l'école primaire… Les problèmes correspondants sont résolus en référence au sens, en utilisant les mêmes types de raisonnement (en se limitant donc à des données qui le permettent), comme le montre l'exemple suivant : « Un objet coûte 240 € et subit une hausse de 20 %. » Pour calculer l'augmentation, à la fin de l'école primaire, les élèves peuvent utiliser un raisonnement du type : « Pour 100 €, la hausse est de 20 € ; pour 200 €, elle est de 40 € ; pour 10 € elle est de 2 €, pour 40 €, elle est donc de 8 €, et pour 240 €, elle sera de 48 €. » La procédure experte pour calculer l'augmentation n'est enseignée qu'en sixième (pour prendre 20 % de 240, on calcule $240 \times \dfrac{20}{100}$ ou $240 \times 0{,}20$) et en troisième les élèves apprendront à trouver directement le nouveau prix (en calculant $240 \times 1{,}20$).
Sur l'ensemble du collège, une étude systématique de la proportionnalité et de ses applications est envisagée, avec la mise en place progressive de procédures générales (par exemple pour calculer un pourcentage, une vitesse moyenne…) qui prendront appui sur les procédures locales et personnelles que les élèves ont pu utiliser à l'école primaire et les remplaceront. L'étude de la fonction linéaire, en fin de collège, fournit un cadre algébrique pour le traitement des problèmes de proportionnalité.
À l'école primaire, les élèves sont amenés à lire, interpréter et utiliser divers modes de représentations de données (liste, tableaux, diagrammes, graphiques). Ce travail se poursuit au collège dans le domaine des statistiques. A l'école, comme au collège, l'analyse critique des informations communiquées à travers de tels supports participe à la formation du citoyen

Connaissance des nombres entiers naturels

À l'issue de l'école primaire, les connaissances relatives à la numération des nombres entiers naturels semblent bien maîtrisées : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture du nombre, lecture et écriture, comparaison et placement sur une droite graduée. Les élèves ont eu l'occasion de s'assurer une première maîtrise de certaines relations arithmétiques entre les nombres : utilisation de relations du type double, moitié, triple, tiers, trois quarts, deux tiers…, relations entre nombres d'usage courant, par exemple entre 5, 10, 25, 50, 75, 100 ou entre 5, 15, 30, 45, 60. Elle constitue un point d'appui pour le calcul mental. Cette première culture du nombre entier doit être enrichie et consolidée au collège.
Dans ce domaine comme dans les autres, le professeur de sixième doit s'assurer que le vocabulaire et la symbolique utilisés sont compris de tous. Les signes < et > sont souvent lus « plus petit que » et « plus grand que » ; les formulations « inférieur à » et « supérieur à » sont donc à utiliser progressivement au collège. L'expression « multiple de … » est utilisée au cycle 3 avec la signification « être dans la table de multiplication de … », mais le terme « diviseur » n'est utilisé que dans le contexte de l'opération de division, pour désigner le « nombre qui divise ».

Connaissance des fractions et des nombres décimaux

Au cycle 3, les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales, le lien avec le système métrique étant fait ensuite. Seules quelques fractions usuelles (exprimées en demis, quarts, tiers et fractions décimales) sont utilisées par les élèves et travaillées dans le but d'introduire les nombres décimaux par le biais des fractions décimales. La fraction est introduite en référence au partage d'une unité, le dénominateur indiquant la nature du partage et le numérateur le nombre de « parts » considérées ($\dfrac{3}{4}$, lu « trois quarts », est compris comme « trois fois un quart »). Le travail sur les écritures fractionnaires reste donc modeste à l'école primaire : ni les calculs, ni les comparaisons, ni les égalités ne sont l'objet de compétences devant être acquises à la fin du cycle 3, mais les élèves ont résolu ce type de questions en se référant à la signification de l'écriture fractionnaire. Ils ont appris à encadrer une fraction simple par deux entiers naturels consécutifs et à l'écrire sous forme de somme d'un entier naturel et d'une fraction inférieure à 1. Au collège, notamment en sixième, où la notion de quotient occupe une place centrale, la signification de l'écriture fractionnaire est étendue à la fraction considérée comme quotient : $\frac{3}{4}$ est conçue comme le nombre quotient de 3 par 4, nombre par lequel il faut multiplier 4 pour obtenir 3. Il appartient donc au professeur de collège de faire le lien entre les deux conceptions, celle utilisée à l'école élémentaire et celle qui est travaillée au collège, et de faire en sorte que le quotient $\frac{a}{b}$ acquiert le statut de nombre, nombre qui peut être approché par un décimal.

La maîtrise des nombres décimaux est loin d'être assurée au sortir de l'école primaire. Le sens même de l'écriture à virgule (valeur de chaque chiffre en fonction de sa position) est repris en sixième, en particulier pour assurer une bonne compréhension des procédures de comparaison, d'encadrement et d'intercalation. Dans le prolongement du travail effectué à l'école primaire, plusieurs aspects sont à consolider concernant les nombres décimaux :
– considérer l'écriture à virgule comme une autre écriture des fractions décimales (sens de 1/10, 1/100…) ;
– comprendre que les décimaux sont un bon outil pour mesurer des grandeurs, pour repérer des points sur la droite numérique (aspect fondamental pour la comparaison, l'encadrement, les approximations…) ;
– utiliser les décimaux pour approcher le quotient de deux entiers.
Dès l'école primaire, les nombres décimaux peuvent être utilisés dans des problèmes de division prolongée au-delà de la virgule (problèmes de partage de longueurs, par exemple), sans que pour autant l'écriture fractionnaire ne soit introduite pour désigner le quotient ni que le calcul de quotients décimaux ne soit systématisé.
En sixième, l'écriture fractionnaire est prolongée à des cas comme $\frac{5{,}24}{2{,}1} = \frac{524}{210}$, mais aucune compétence n'est exigible quant à la division dans le cas d'un diviseur décimal.

Calcul

L'évolution des outils de calcul dans la société conduit à repenser les objectifs de son enseignement. À l'école comme au collège les programmes distinguent trois types de calcul : mental, instrumenté et posé.
Les compétences en calcul mental sont à développer en priorité. La distinction est faite entre ce qu'il est nécessaire de mémoriser ou d'automatiser… et ce qu'il est possible de reconstruire. Le calcul mental, exact ou approché, comporte en effet deux aspects : calcul mental automatisé et calcul mental réfléchi.

Le calcul mental automatisé

Il correspond à l'idée restrictive qu'on se fait trop souvent du calcul mental, limité à la connaissance par cœur de résultats et de règles. Dans ce domaine, certains résultats comme ceux des tables de multiplication ou certaines règles comme celles de la multiplication par 10, 100, 1000 doivent être bien mémorisés pour être directement disponibles à l'entrée en sixième. Cependant, à l'entrée au collège, la connaissance des tables de multiplication n'est pas encore stabilisée pour tous les élèves et doit donc être entretenue. Elle doit être disponible pour l'élève, aussi bien pour donner le résultat d'un produit de deux nombres que pour trouver différentes décompositions d'un nombre ou encore pour déterminer un facteur connaissant un produit et l'autre facteur.

Le calcul mental réfléchi

Il correspond à la capacité d'obtenir par une démarche personnelle le résultat d'un calcul, par exemple en le décomposant en calculs plus accessibles. L'élève doit analyser le calcul et élaborer un raisonnement numérique. Il s'appuie alors, souvent implicitement, sur des propriétés des opérations (commutativité, distributivité, associativité) et sur des résultats mémorisés. Si nécessaire, il écrit certains calculs et résultats intermédiaires. En calcul réfléchi, chaque élève met en œuvre, à un moment donné et pour un calcul donné, une procédure personnelle. Dans une même classe, les procédures utilisées peuvent être très variées et donner lieu à des échanges et des débats. Ainsi le résultat de 6×15 peut être obtenu en effectuant, par exemple :
– $2 \times 3 \times 15$ (utilisation implicite de l'associativité, de la commutativité, des connaissances des doubles ou des triples au cycle 3) ;
– $6 \times 10 + 6 \times 5$ (utilisation de la distributivité implicite à l'école primaire ou explicite en cinquième) ;
– $10 \times 6 = 60$ et $60 : 2 = 30$ et $60 + 30$ (pour un élève qui a pris conscience que multiplier par 5, c'est multiplier par 10 et diviser par 2) ;
– $(6 \times 30) : 2$ ou $(6 \times 5) \times 3$ (utilisation implicite de l'associativité).
Les procédures utilisées s'appuient souvent sur des relations arithmétiques connues entre les nombres : pour multiplier 8 par 0,25, il est possible d'utiliser un résultat connu tel que $4 \times 0{,}25 = 1$.
Au cycle 3, les élèves évaluent des ordres de grandeurs et, grâce à cela, développent des moyens de contrôle de leurs calculs.
La pratique du calcul mental (automatisé et réfléchi) se poursuit au collège sur les entiers et les décimaux, notamment pour ce qui concerne le calcul approché qui reste un exercice difficile pour beaucoup d'élèves. Il s'étend au calcul avec les fractions, les racines carrées, puis le calcul algébrique.
Ainsi la somme $2+\frac{2}{3}$ peut être traitée :
– en sixième, en référence à la fraction partage et aux grandeurs (« 2 c'est 2 unités ; dans une unité il y a 3 tiers donc 2 unités c'est 6 tiers ; 6 tiers plus 2 tiers,

c'est 8 tiers » ; ce qui se traduit par $\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$) ou en évoquant par exemple l'image mentale de la droite graduée ($\frac{2}{3}$ c'est $1-\frac{1}{3}$, donc $2+\frac{2}{3}$ c'est aussi $3-\frac{1}{3}$, donc $\frac{3}{8}$) ;

– en fin de cinquième, avec une « technique » de mise au même dénominateur : $\frac{6}{3}+\frac{2}{3}$.

L'exemple précédent montre que les procédures élaborées dépendent des conceptions des élèves (appui sur la fraction partage pour la première procédure). L'aisance en calcul mental apporte une aide à la résolution de problèmes numériques, aussi bien pour élaborer une stratégie en essayant de résoudre le même problème avec des nombres plus familiers que pour vérifier la vraisemblance d'un résultat par un calcul d'ordre de grandeur.

Le calcul instrumenté (usage de la calculatrice)

Il nécessite un apprentissage. Dès le cycle 2, les programmes prévoient l'utilisation de la calculatrice dans quatre directions :
– comme outil de calcul ;
– comme instrument dont on cherche à comprendre certaines fonctionnalités ;
– pour explorer des phénomènes numériques ;
– comme source de problèmes et d'exercices.

Les élèves de l'école élémentaire sont donc familiarisés à l'usage raisonné de la calculatrice : utilisation des fonctions mémoires et facteur constant et des touches parenthèses d'une calculatrice ordinaire. L'utilisation pertinente de la calculatrice (c'est-à-dire lorsqu'un calcul mental exact ou approché n'est pas approprié) n'est pas spontanée et demande un apprentissage encadré. Les élèves doivent être formés à une lecture critique des résultats affichés, avec en particulier un contrôle de la vraisemblance du résultat par un calcul mental approché.

Au collège, cet apprentissage se poursuit, les programmes insistant sur « la nécessité d'un travail spécifique avec des calculatrices, tout en veillant à ce que chacun acquiert des connaissances suffisantes en calcul écrit et mental. Il s'agit de conduire tous les élèves du cycle central à une maîtrise des calculatrices scientifiques élémentaires… ».

Le calcul posé (techniques opératoires)

Ici, l'objectif essentiel réside dans la compréhension des techniques utilisées. À l'école primaire, les élèves ont appris à calculer des sommes et des différences de décimaux, des produits de deux entiers naturels ou d'un décimal par un entier, des quotients et restes dans le cas de la division euclidienne, avec possibilité de poser des soustractions intermédiaires et des produits partiels annexes pour déterminer un chiffre du quotient. Le produit de deux décimaux, comme le calcul d'un quotient décimal, ne figure pas au programme du cycle 3. Cet apprentissage relève de la classe de sixième : technique de calcul et sens (reconnaissance des situations où interviennent le produit de deux décimaux ou un quotient décimal). Cependant, à l'école élémentaire, les élèves ont pu être confrontés à des problèmes du type :
– calcul de « l'aire du rectangle », par exemple en ayant recours à des changements d'unités ou à des procédures personnelles ;
– recherche du « prix de 3,5 kg de fromage à 12,60 € le kg » où ils peuvent utiliser des procédures personnelles, par exemple liées à la proportionnalité, comme calculer le prix de 3 kg, puis celui de 500 g considéré comme la moitié de 1 kg (ce qui est permis par les valeurs numériques choisies) ;
– recherche de la valeur obtenue en partageant équitablement 50 € entre 8 personnes : après avoir donné 6 € à chacun, le reste peut être converti en centimes pour poursuivre le partage.

Pour plus de précision on peut se reporter au document d'application pour le cycle 3[1].

Espace et géométrie

L'une des finalités du travail relatif à la géométrie à l'école élémentaire est d'amener les élèves à passer d'une reconnaissance perceptive des objets mathématiques du plan et de l'espace à une connaissance de ces objets appuyée sur certaines propriétés, vérifiées à l'aide d'instruments. Il s'agit également de favoriser la mise en place d'images mentales pour les principaux concepts rencontrés (alignement, parallélisme, longueur, axe de symétrie, angle) et pour les objets géométriques courants (triangle et ses cas particuliers, carré, rectangle, losange, cercle, cube et parallélépipède rectangle), permettant aux élèves de les identifier dans des configurations variées. Les connaissances relatives aux diagonales des quadrilatères ne sont pas exigées à l'école élémentaire.

Cette géométrie est donc essentiellement expérimentale, même si quelques questions nécessitant des déduction doivent déjà être proposées. Elle est organisée autour de cinq grands types de problèmes : reproduire, décrire, représenter, construire, localiser. Les élèves sont entraînés au maniement d'instruments (équerre, règle, compas, gabarit) sur des supports variés, feuilles de papier quadrillé ou non, en particulier pour le tracé de perpendiculaires et de parallèles (à l'aide de la règle et de l'équerre). Des activités utilisant des logiciels de tracés sur écran d'ordinateur ont également pu être proposées. Une première utilisation des tracés à main levée favorise la construction d'images mentales et aide à anticiper des tracés plus précis.

1. *Mathématiques, cycle 3*, *op. cit.*, pages 21-24.

Un vocabulaire, limité mais précis, est mis en place : face, arête, sommet, côté, segment, milieu, angle, perpendiculaire, parallèle, points alignés, droite, centre, rayon, diamètre, figure symétrique par rapport à une droite, axe de symétrie.
Les connaissances géométriques sont complétées par des connaissances relatives à l'espace : repérage de cases ou de points sur quadrillage, utilisation de plans et de cartes.
Concernant la symétrie, les élèves savent compléter une figure en utilisant des techniques de pliage ou le papier calque. Ils savent aussi construire le symétrique d'une figure sur quadrillage (axe vertical, horizontal ou en suivant une diagonale). La construction du symétrique d'un point et l'étude systématique de la symétrie relèvent du collège.
De premières expériences d'agrandissement ou de réduction de figures sont proposées à l'école primaire, notamment en relation avec la proportionnalité.
En sixième, où la géométrie occupe une place nettement plus importante qu'à l'école primaire (environ un tiers du temps au collège contre un cinquième du temps dédié aux mathématiques à l'école primaire), les élèves ne travaillent pas sur des objets nouveaux. Les travaux conduits à ce niveau doivent prendre en compte les acquis antérieurs, évalués avec précision et se fixer de nouveaux enjeux. Ils doivent viser en particulier à stabiliser les connaissances des élèves, à les structurer, et peu à peu à les hiérarchiser… avec, notamment, un objectif d'initiation à la déduction. Les élèves passent d'une lecture globale des dessins géométriques à une lecture ponctuelle : désignation des points par des lettres, identification de points comme intersection de deux droites, cercle comme figure constituée des points situés à une distance donnée d'un point donné. La distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie, notamment en distinguant les propriétés vérifiées expérimentalement et les propriétés établies par déduction.
À l'école primaire, les élèves ont commencé à utiliser des lettres pour désigner des points (sommets d'un polygone, extrémités d'un segment), mais le recours aux notations symboliques (//, ⊥…) ou aux conventions pour désigner des propriétés relèvent du collège où leur introduction doit être progressive et faire l'objet d'une attention particulière.

Grandeurs et mesures

Le nouveau programme de l'école primaire insiste sur la nécessité de travailler la compréhension des grandeurs, par des activités de comparaison, de classement et de rangement, préalablement à leur mesure et à l'utilisation de formules.
Les élèves qui arrivent en sixième ont étudié les unités légales de longueur, de masse et de contenance (système métrique). Lorsque des unités agraires interviennent, les correspondances avec les unités légales sont fournies aux élèves. Ils savent calculer le périmètre d'un rectangle, mais le calcul du périmètre du cercle à l'aide d'une formule n'est pas au programme du cycle 3 et l'introduction du nombre π relève du collège
La notion d'aire est en cours de construction à la fin de l'école élémentaire, le travail visant d'abord la maîtrise de la grandeur (distinction entre aire et périmètre). Les élèves sont également entraînés à déterminer des aires par pavage et dénombrement, sans que l'unité d'aire soit forcément un carré. Le travail sur les formules est limité à l'aire du rectangle. En sixième, le travail sur les aires est repris dans le même esprit pour consolider et stabiliser les connaissances des élèves et pour y intégrer celles du programme de sixième.
La notion de volume a pu être approchée à propos de problèmes de contenance mais les élèves n'ont aucune connaissance des unités de volumes (autres que celles relatives aux contenances) et aucune compétence relative aux calculs de volume à partir des dimensions d'un solide. La construction des connaissances relatives au volume relèvent du collège (construction de la grandeur, maîtrise des unités et des calculs de volumes).
Le travail sur les angles reste très limité au cycle 3. Seul un travail de comparaison à partir de gabarit est proposé, ainsi qu'une première approche de leur mesure avec l'angle droit comme unité : le demi-angle droit, le quart d'angle droit sont utilisés. Mais la question générale de la mesure des angles et l'apprentissage de l'utilisation du rapporteur relèvent du collège : le degré comme unité d'angle comme la mesure de l'angle droit (90°) sont des connaissances du programme de sixième.
Pour les calculs de durée, les élèves utilisent des procédures adaptées à chaque cas. Par exemple, la recherche de la durée de circulation d'un train parti à 13 h 50 min et arrivé à 15 h 10 min peut être obtenue de la façon suivante : de 13 h 50 min à 14 h, il y a 10 min; de 14 h à 15 h, il s'écoule 1 h et il reste 10 min pour aller de 15 h à 15 h 10 min; soit au total 1 h 20 min. Les calculs posés en colonne ne sont pas indispensables.

Parler, lire et écrire en mathématiques

L'enseignement des mathématiques, aux côtés d'autres disciplines, contribue au développement des compétences dans le domaine de la maîtrise du langage et de la langue française. Le travail concernant la spécificité des textes utilisés en mathématiques (vocabulaire, notations, syntaxe) est amorcé à l'école élémentaire et doit être poursuivi au collège. Les mathématiques ont en effet recours à la langue ordinaire, mais également à des langages spécifiques, symbolique (notations) et graphique (figures, schémas, diagrammes…). Toutes ces questions peuvent être l'occasion d'un travail conjoint entre professeurs de mathématiques et de français.

L'oral

Les nouveaux programmes pour l'école primaire insistent sur la place importante de l'oral dans toutes les disciplines, notamment lors des phases de mise en commun où les élèves sont amenés à expliciter des démarches et des résultats et à échanger des arguments. Au collège comme à l'école primaire, les compétences nécessaires pour la validation et la preuve (articuler et formuler les différentes étapes d'un raisonnement, communiquer, argumenter à propos de la validité d'une solution) sont d'abord travaillées oralement en s'appuyant sur les échanges qui s'instaurent dans la classe ou dans un groupe, avant d'être sollicitées par écrit individuellement.
Au collège, les mathématiques se disent encore avant de s'écrire. Par exemple il est plus facile, pour un élève, de concevoir que $2x$ plus $5x$ est égal à $7x$ ou que $\frac{2}{3}$ plus $\frac{5}{3}$ égale $\frac{7}{3}$ en verbalisant (deux tiers plus cinq tiers est égal à sept tiers) plutôt qu'en travaillant directement sur les écritures symboliques.
À l'école, les problèmes sont souvent présentés aux élèves en utilisant le langage oral : question posée sous forme orale en appui sur une situation matérialisée, situation décrite oralement avec quelques éléments importants écrits au tableau, situation présentée sous forme d'un énoncé écrit, reformulée par l'enseignant ou par les élèves. Au collège, où pour la présentation des problèmes l'écrit prend une place plus importante, le recours à l'oral est également utile pour éviter que certains élèves ne restent à l'écart de l'activité mathématique, en particulier ceux qui ont des difficultés avec la lecture.
Une attention particulière est déjà apportée à l'école primaire aux significations différentes que peuvent avoir les mêmes mots selon qu'ils sont employés dans leur usage courant ou en mathématiques. La même vigilance doit être maintenue au collège. Par exemple : rayon du magasin, rayon du cercle et rayon de soleil ; se tenir droit, trait droit et angle droit ; agrandir le garage et agrandir une figure de géométrie…

La lecture

La compréhension d'un texte mathématique demande à la fois des compétences dans le domaine de la langue usuelle, un décodage correct de tous les symboles utilisés et une bonne compréhension des notions mathématiques évoquées.
À l'école primaire, les textes des énoncés évoquent souvent des situations dites concrètes et sont exprimés le plus souvent possible dans le langage courant. En passant au collège, les élèves vont rencontrer des textes dont la syntaxe et la formulation sont une source de difficulté supplémentaire. Par exemple la lecture d'une consigne comme « Trace la droite perpendiculaire à la droite D qui passe par le point A » nécessite usuellement de comprendre que c'est la perpendiculaire demandée qui doit passer par le point A. Dans un premier temps l'utilisation d'une consigne formulée en isolant les deux informations facilite la lecture des élèves. Les expressions inusitées dans le langage courant comme : « Sachant que », « Soit le triangle », « Étant donné »…, d'abord évitées, doivent ensuite, lorsqu'elles sont rencontrées, faire l'objet d'une lecture encadrée.
Le document d'application associé au programme de cycle 3 rappelle « qu'il est important que la prise d'informations se fasse sur des supports variés (textes, tableaux, graphiques, schémas) ». Cette recommandation vaut également pour le collège.
En passant de l'école primaire au collège, les élèves sont amenés plus souvent à lire seuls des informations de référence dans leur cahier ou sur d'autres supports : livre de mathématiques en étude ou à la maison, autres livres ou encyclopédie au centre de documentation, logiciel d'entraînement ou document Internet en salle informatique… Ces écrits de référence, souvent concis et condensés comportent parfois des formulations et des expressions différentes de celles employées par l'enseignant (en particulier lorsqu'ils n'ont pas été rédigés avec les élèves dans la classe). Ils sont souvent difficiles à décoder et demandent, pour être lus et compris, un travail spécifique réalisé en classe.

L'écriture

Les nouveaux programmes pour le cycle 3 précisent les différentes fonctions de l'écrit qui restent pertinentes pour le collège :
– les écrits de recherche sont des écrits « privés » (brouillon pour soi, pour chercher) qui n'ont pas à être soumis au regard ou à la critique des autres. Ils peuvent cependant être consultés par l'enseignant pour aider l'élève dans sa recherche ;
– les écrits destinés à être communiqués et discutés (au sein d'un groupe ou de la classe) doivent faire l'objet d'une mise en forme pour être lisibles et pour servir éventuellement de support à un débat ;
– les écrits de référence contribuent à institutionnaliser des éléments de savoir. Élaborés sous la responsabilité de l'enseignant en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève ou de la classe, ils sont destinés à être conservés.
Au collège, la part des activités écrites, en mathématiques, devient plus importante, en même temps que leur forme se spécifie, que l'exigence de précision dans le vocabulaire s'accroît et que de nombreuses

notations apparaissent avec des nouveaux symboles. Il s'agit là d'une des difficultés perçues par les élèves dans le passage de l'école au collège et à laquelle il convient d'être particulièrement attentif. Le vocabulaire et les notations nouvelles sont introduits progressivement au moment où ils deviennent nécessaires. Il s'agit « d'entraîner les élèves à mieux lire et mieux comprendre un texte mathématique et aussi à produire des textes dont la qualité est destinée à être l'objet d'une amélioration progressive ». Ce travail sera poursuivi en cinquième et en quatrième.
La comparaison des écrits proposés ou demandés aux élèves de fin de cycle 3 et en sixième constitue un objet d'échange et de formation à privilégier entre enseignants de l'école et du collège.

De l'environnement de l'écolier à celui du collégien

En passant du CM2 à la sixième, les élèves sont parfois déroutés par le nouvel environnement, les conditions de travail et le découpage du temps qu'ils rencontrent au collège.

Le travail personnel

Au collège, les programmes soulignent que « le travail personnel des élèves, en étude ou à la maison, est essentiel à leur formation ». Il doit faire l'objet d'une véritable attention afin que le nouveau collégien perçoive le bénéfice qu'il peut en tirer, dans quel but il le fait et quelles en sont les différentes fonctions :
– les exercices d'entraînement simples, accessibles à tous et éventuellement différenciés, permettent de consolider les connaissances ou de prendre conscience de certaines difficultés qui seront exploitées lors du prochain cours : ils aident à apprendre la leçon ;
– certains travaux demandés sont nécessaires au déroulement de la séance suivante (fabrication ou recherche d'un matériel préparatoire) ;
– les travaux individuels de rédaction développent les capacités d'expression écrite, ils permettent ensuite au professeur de formuler par écrit des remarques individualisées amenant éventuellement à une réécriture.
Dans les classes élémentaires, le travail scolaire à faire à la maison est limité : les devoirs écrits sont proscrits ; par contre, des lectures, des recherches, des éléments à mémoriser peuvent constituer le travail proposé aux élèves. Tout travail à la maison fait l'objet d'une vérification par le maître. Progressivement, les élèves de cycle 3 commencent à gérer leur travail sur la semaine. Au collège, les tâches écrites demandées en étude ou à la maison sont nombreuses et parfois importantes dans toutes les disciplines, s'ajoutant aux leçons, avec des supports et des exigences qui varient d'un enseignant à l'autre. Elles exigent des élèves de savoir gérer le temps dont ils disposent à l'extérieur de la classe et de la part des enseignants de trouver un équilibre raisonnable et de définir avec clarté la finalité et l'utilisation qui sera faite de ces travaux.

La différenciation

Au collège comme à l'école, la gestion de l'hétérogénéité est une préoccupation pour les enseignants. Pour gérer les différences, il est trop souvent fait uniquement appel à la constitution de groupes homogènes. D'autres possibilités peuvent être utilisées avec le groupe classe :
– permettre aux élèves de réaliser une même tâche avec des démarches personnelles différentes, en fonction de leurs connaissances ;
– varier les supports (énoncés de formes différentes pour un même problème) et les outils (calculatrice disponible ou pas, figure fournie ou pas) en fonction des élèves.
C'est seulement pour les élèves qui rencontrent des difficultés importantes que des dispositifs particuliers doivent être mis en place systématiquement, en réduisant les difficultés de l'écrit par le recours à des supports divers : oralisation, schématisation, verbalisation, reformulation, identification des objectifs de l'activité. Il serait vain de penser faire progresser les élèves en leur fournissant des stratagèmes qui conduisent à la réalisation de tâches purement mécaniques. Ce serait même un contre-sens.

Imprimé sur les presses de Desmet-Laire
19, rue des Résistants
B-7750 Mont-de-l'Enclus
Dépôt légal : février 2005