Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2007 du sujet de Polynésie Française

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. - L'énoncé 1 est **faux**. Si $x = \frac{1}{2}$, par exemple, $2 \times x = 1$ est entier naturel, bien que x ne soit pas un entier naturel.
   - L'énoncé 2 est **vrai**. Le produit de deux entiers naturels est entier naturel. Ainsi, comme 2 et $\frac{x}{2}$ sont entiers naturels, $x = 2 \times \frac{x}{2}$ est entier naturel aussi.
   - L'énoncé 3 est **faux**. Si $x = -1$, $x + 1 = 0$ est entier naturel, bien que x ne soit pas un entier naturel (c'est le seul contre-exemple).

     Remarque. Par contre, si x est entier naturel, alors $x + 1$ est entier naturel aussi. La réciproque de l'énoncé 3 est vrai.

2. Soient x, y et z les trois nombres choisis. Les sommes que l'on peut obtenir en les additionnant deux à deux sont alors $x + y$, $x + z$ et $y + z$.

   Les données nous fournissent alors un système linéaire à trois équations et trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=78\ [L_1] \\ x+z=59\ [L_2] \\ y+z=43\ [L_3] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=78\ [L_1] \\ y-z=19\ [L_2'=L_1-L_2] \\ y+z=43\ [L_3] \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=78\ [L_1] \\ y-z=19\ [L_2'] \\ 2\times y=62\ [L_3'=L_2'+L_3] \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=47 \\ y=31 \\ z=12 \end{array}\right.$$

Les trois nombres choisis sont donc 12, 31 et 47.

*Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Exercice 2

Partie A

1. Soit $\mathcal{V}_{Aquarium}$ le volume de l'aquarium et $\mathcal{V}_{Eau}$ le volume d'eau dans l'aquarium.
   $\mathcal{V}_{Aquarium} = 1\ m \times 0,3\ m \times 0,45\ m = 0,135\ m^3 = 0,135 \times 1000\ \mathcal{L} = 135\ \mathcal{L}$.
   $\mathcal{V}_{Eau} = 0,8 \times \mathcal{V}_{Aquarium} = 0,8 \times 135\ \mathcal{L} = 108\ \mathcal{L}$.
2. (a) On synthétise les données dans un tableau de proportionnalité ...

Volume d'eau en litres	20	108
Nombre de gouttes versées le premier jour	10	x

Pour donner la valeur de x, la propriété des rapports égaux donne $\frac{10}{20} = \frac{x}{108}$ puis $x = 54$.
Le premier jour, il faut donc verser 54 gouttes.

(b) On synthétise les données dans un tableau de proportionnalité ...

Volume d'eau en litres	20	108
Nombre de gouttes versées à la fin du traitement	20	y

Pour donner la valeur de y, la propriété des rapports égaux donne $\frac{20}{20} = \frac{y}{108}$ puis $y = 108$.
A la fin du traitement, on aura versé 108 gouttes en tout.

Partie B

1. Soit $\mathcal{V}_{Aquarium}(L,l)$ le volume de l'aquarium, $\mathcal{V}_{Eau}(L,l)$ le volume d'eau dans l'aquarium et $\mathcal{N}(L,l)$ le nombre de gouttes versées le premier jour dans l'aquarium.
   $\mathcal{V}_{Aquarium}(L,l) = L\ dm \times l\ dm \times 4,5\ dm = 4,5 \times L \times l\ dm^3 = 4,5 \times L \times l\ \mathcal{L}$.
   $\mathcal{V}_{Eau}(L,l) = 0,8 \times \mathcal{V}_{Aquarium}(L,l) = 0,8 \times 4,5 \times L \times l\ \mathcal{L} = 3,6 \times L \times l\ \mathcal{L}$.
   $\mathcal{N}(L,l) = \mathcal{V}_{Eau}(L,l) \times \frac{10}{20\ \mathcal{L}} = 1,8 \times L \times l$.
2. Les valeurs dans le tableau ...

	50 cm	75 cm	100 cm	150 cm
30 cm	27 gouttes	40, 5 gouttes$^{(*)}$	54 gouttes	81 gouttes
40 cm	36 gouttes	54 gouttes	72 gouttes	108 gouttes

$^{(*)}$ On demande d'arrondir 40, 5 à l'entier le plus proche ! Est-ce à 40 ou à 41 ?

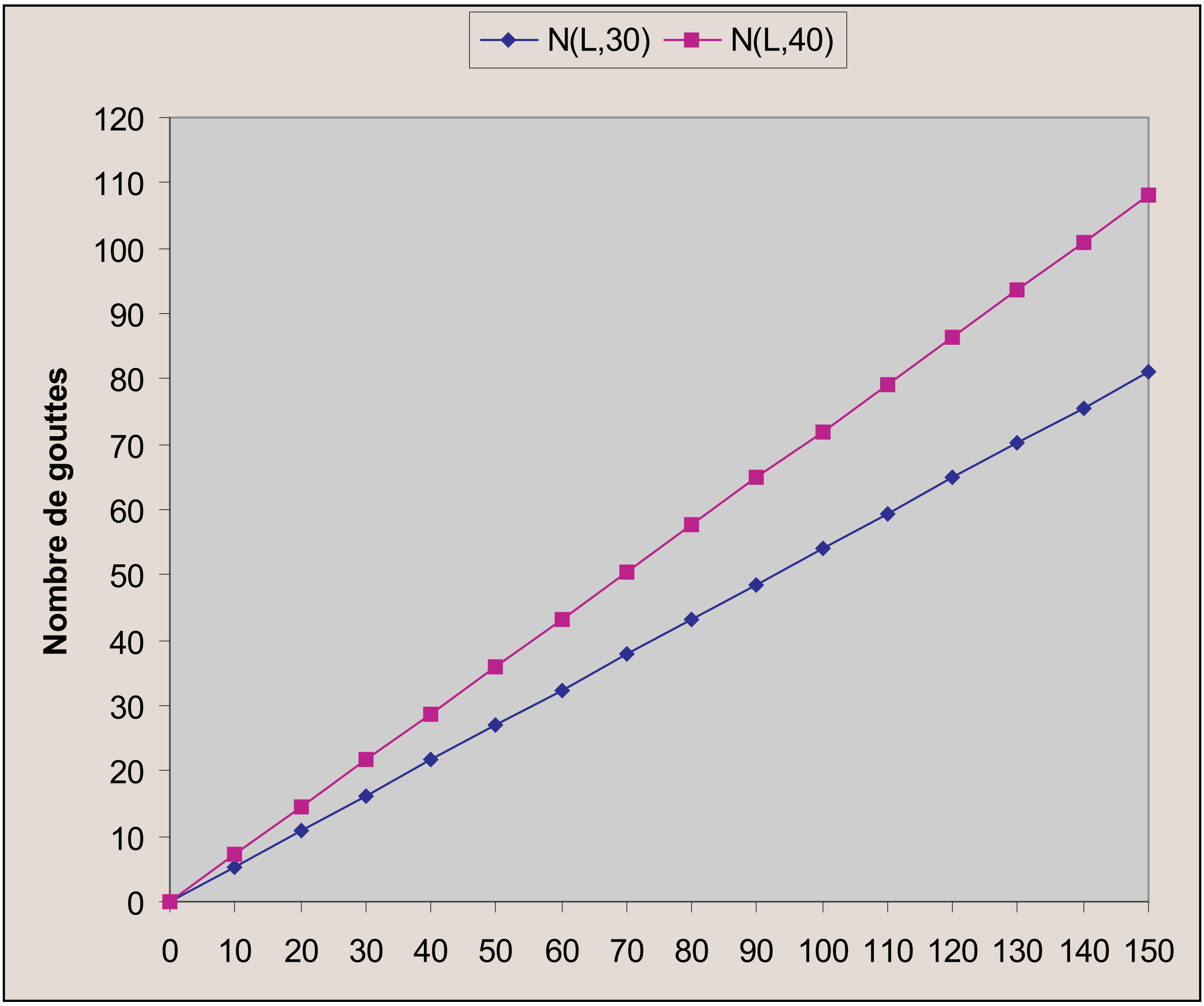
Les opérateurs entourés du haut vers le bas ...

- "$\times 3$" ;
- "$\div 2$" ;
- "$\times \frac{4}{3}$" ;
- "$\div 2$".

Les opérateurs à eux seuls justifient les valeurs du tableau.

Partie C

1. Sur l'axe des abscisses, la longueur de l'aquarium en centimètres. Sur l'axe des ordonnées, le nombre de gouttes à verser dans l'aquarium le matin.
   - En bleu, le graphique correspondant à une largeur de 30 *cm*. La fonction associée est $N(L, 30) = 0,54 \times L$ où L est la longueur de l'aquarium exprimée en centimètres.
   - En rose, le graphique correspondant à une largeur de 40 *cm*. La fonction associée est $N(L, 40) = 0,72 \times L$ où L est la longueur de l'aquarium exprimée en centimètres.



2. (a) Il suffit de lire la valeur correspondant à $L = 120$ sur le graphique rose : on trouve graphiquement que le nombre de gouttes à verser le premier jour est proche de 85 (la lecture graphique ne peut donner ici qu'une estimation du résultat ; en fait, $N(120, 40) = 86,4$).

   (b) Il suffit de lire la valeur correspondant à $L = 90$ sur le graphique bleu : on trouve graphiquement que le nombre de gouttes à verser le premier jour est proche de 50 (la lecture graphique ne peut donner ici qu'une estimation du résultat ; en fait, $N(90, 30) = 48,6$).

Question complémentaire

1. La notion sous-jacente est la **proportionnalité** et plus précisément les relations additives et/ou multiplicatives de linéarité.
2. On peut envisager au moins deux procédures de résolution de ces énoncés :
   (a) Le passage par le prix unitaire, soit 25€par objet dans l'énoncé 1 et $2,20$€par objet dans l'énoncé 2, pour déduire que le prix de 9 objets soit 9×25€$=225$€dans l'énoncé 1 et de 15 objets soit $15 \times 2,20$€$=33$€dans l'énoncé 2.
   (b) L'utilisation des propriétés de linéarité (qu'elles soient additives ou multiplicatives) : par exemple, dans l'énoncé 1, si 6 objets coûtent 150€, 9 (9 qui est 6 ajouté à la moitié de 6) objets coûtent 150€$+\frac{150}{2}$€$=225$€ ; dans l'énoncé 2, si 10 objets coûtent 22€, 15 (15 qui est 10 ajouté à la moitié de 10) objets coûtent 22€$+\frac{22}{2}$€$=33$€.

   Ainsi, le deuxième énoncé a pour effet de rendre la première procédure moins efficace (l'utilisation des décimaux rend les calculs plus complexes). C'est aussi ce pourquoi l'objectif est l'utilisation des propriétés additives et/ou multiplicatives de linéarité et non pas le passage par le prix unitaire.

   Il s'agit ici d'évaluer les élèves à l'entrée en sixième. La raison (qui n'est pas pédagogique puisqu'il s'agit ici d'une évaluation sommative) pour laquelle deux énoncés sont proposés est de savoir si les élèves
   - maîtrisent les propriétés de linéarité (additives et/ou multiplicatives)
   - ou maîtrisent les calculs avec des nombres décimaux (la division exacte à quotient non entier, la multiplication d'un entier par un décimal)
   - ou maîtrisent la conversion des euros en centimes d'euros qui permet d'éviter les calculs avec des nombres décimaux.
3. - Soit f la fonction linéaire associée à la situation de proportionnalité qui à x objets de l'énoncé 1 fait correspondre leur coût de $f(x)$€(ainsi, l'énoncé 1 se traduit par $f(6)=150$ déterminer $f(9)$ sachant que f est linéaire).
   - Soit g la fonction linéaire associée à la situation de proportionnalité qui à x objets de l'énoncé 2 fait correspondre leur coût de $g(x)$€(ainsi, l'énoncé 2 se traduit par $g(10)=22$ déterminer $g(15)$ sachant que g est linéaire).
   - $\boxed{\text{Alice}}$ Même procédure dans chacun des deux énoncés (usage de la propriété multiplicative de linéarité) : $f(9)=f(3\times 3)=3\times f(3)=3\times f(\frac{6}{2})=3\times(\frac{f(6)}{2})=3\times(\frac{150}{2})=3\times 75=225$; $g(15)=g(3\times 5)=3\times g(3)=3\times g(\frac{10}{2})=3\times(\frac{g(10)}{2})=3\times(\frac{22}{2})=3\times 11=33$.

     La procédure est correcte. Les calculs sont corrects (multiplications posées en colonne). Les réponses sont correctes.
   - $\boxed{\text{Bruno}}$ Même procédure dans chacun des deux énoncés : il considère que le prix donné est celui d'un objet et non de 6 dans l'énoncé 1 ou de 10 dans l'énoncé 2.

     La procédure est incorrecte bien que si les données avaient été des prix unitaires, elle aurait été correcte. Les calculs sont corrects. Les réponses ne sont pas exprimées (a-t-il eu un doute ?).

- $\boxed{\text{Charles}}$ Même procédure dans chacun des deux énoncés (usage du passage par le prix unitaire) : $f(9) = 9 \times f(1) = 9 \times f(\frac{6}{6}) = 9 \times (\frac{f(6)}{6}) = 9 \times (\frac{150}{6}) = 9 \times 25 = 225$; $g(15) = 15 \times g(1) = 15 \times g(\frac{10}{10}) = 15 \times (\frac{g(10)}{10}) = 15 \times (\frac{22}{10}) = 15 \times 2,2 = 33$.
  La procédure est correcte. Les calculs sont corrects (divisions exactes posées avec la potence et multiplications posées en colonne). Les réponses sont correctes.
- $\boxed{\text{Dalila}}$
  - Pour l'énoncé 1, elle calcule $f(9)$ comme suit (usage des propriétés additives et multiplicatives de linéarité) : $f(9) = f(6 + \frac{6}{2}) = f(6) + \frac{f(6)}{2} = 150 + 75 = 225$.
    La procédure est correcte. Les calculs sont corrects (addition et calcul en ligne d'une moitié). La réponse est correcte.
  - Pour l'énoncé 2, elle calcule $g(15)$ comme suit (usage des propriétés additives et multiplicatives de linéarité et du prix unitaire) : $g(15) = g(10+5) = g(10)+g(5)$; $g(5) = g(1)+g(1)+g(1)+g(1)+g(1)$; $g(1) = g(\frac{10}{10}) = \frac{g(10)}{10} = \frac{22}{10} = 2,2$; $g(15) = g(10) + g(5) = 22 + g(1) + g(1) + g(1) + g(1) + g(1) = 22 + 2,2 + 2,2 + 2,2 + 2,2 + 2,2$.
    La procédure est correcte. Au niveau des calculs, la division posée en potence est correcte, mais l'addition posée en colonne est incorrecte (elle additionne 10 unités et 10 dixièmes comme s'il s'agissait de 10 unités et 10 unités). La réponse est incorrecte.

Exercice 3

Partie A

1. Soit ABC un triangle quelconque. On nomme M le milieu du segment $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. On note $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC, $\mathcal{A}_{ABM}$ l'aire du triangle ABM et $\mathcal{A}_{AMC}$ l'aire du triangle AMC.
   On a $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2}$, $\mathcal{A}_{ABM} = \frac{AH \times BM}{2} = \frac{AH \times \frac{BC}{2}}{2}$ car M est le milieu du segment $[BC]$ et $\mathcal{A}_{AMC} = \frac{AH \times MC}{2} = \frac{AH \times \frac{BC}{2}}{2}$ car M est le milieu du segment $[BC]$. Donc, $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{2} = \mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{AMC}$ et la médiane du triangle ABC "divise" le triangle en deux triangles ABM et AMC de même aire.
2. On note $\mathcal{A}_1$ l'aire de la surface hachurée, $\mathcal{A}_2$ l'aire de la surface blanche, $\mathcal{A}_{ABN}$ l'aire du triangle ABN, $\mathcal{A}_{NBM}$ l'aire du triangle NBM, $\mathcal{A}_{ACN}$ l'aire du triangle ACN et $\mathcal{A}_{NCM}$ l'aire du triangle NCM.
   N est milieu du segment $[AM]$ donc
   – le segment $[BN]$ est une médiane du triangle ABM et d'après la question précédente, $\mathcal{A}_{ABN} = \mathcal{A}_{NBM}$;
   – le segment $[CN]$ est une médiane du triangle ACM et d'après la question précédente, $\mathcal{A}_{ACN} = \mathcal{A}_{NCM}$.
   Puis, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{ABN} + \mathcal{A}_{ACN} = \mathcal{A}_{NBM} + \mathcal{A}_{NCM} = \mathcal{A}_2$. En résumé, les aires en question sont égales.

Partie B

1. On note $\mathcal{A}_3(x)$ l'aire de la surface hachurée, $\mathcal{A}_4(x)$ l'aire de la surface blanche, $\mathcal{A}_{DMFE}$ l'aire du carré $DMFE$, $\mathcal{A}_{MCHF}$ l'aire du rectangle $MCHF$, $\mathcal{A}_{FHBG}$ l'aire du rectangle $FHBG$ et $\mathcal{A}_{EFGA}$ l'aire du

rectangle $EFGA$. Si $ABCD$ et $EDMF$ sont des rectangles et si $DMFE$ est un carré, il est immédiat que les quadrilatères $MCHF$ et $EFGA$ sont des rectangles (car ils possèdent trois angles droits). Dans l'énoncé, on traduit "$DE = x$ [...], l'unité choisie étant le centimètre" par $DE = x\ cm$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3(x) &= \mathcal{A}_{DMFE} + \mathcal{A}_{FHBG}\\ &= x^2\ cm^2 + (20\ cm - x\ cm) \times (8\ cm - x\ cm)\\ &= (x^2 + 160 - 20 \times x - 8 \times x + x^2)\ cm^2\\ &= (2 \times x^2 - 28 \times x + 160)\ cm^2\end{aligned}$$

que l'on peut traduire par "l'aire de la partie grisée est $2 \times x^2 - 28 \times x + 160$, l'unité choisie étant le centimètre carré".

2. En développant l'expression $2 \times (x-7)^2 + 62$, ...

$$\begin{aligned}2 \times (x-7)^2 + 62 &= 2 \times (x^2 - 14 \times x + 49) + 62\\ &= 2 \times x^2 - 28 \times x + 98 + 62\\ &= 2 \times x^2 - 28 \times x + 160,\end{aligned}$$

on obtient l'identité demandée.

3. $2 \times (x-7)^2 + 62$ est minimal lorsque $2 \times (x-7)^2$ est minimal, c'est-à-dire lorsque $2 \times (x-7)^2 = 0$ (car $2 \times (x-7)^2 \geq 0$) ou lorsque $x = 7$. Ainsi, l'aire de la partie grisée est mimimale lorsque $x = 7$.

4.

$$\begin{aligned}& \mathcal{A}_3(x) = 112\ cm^2\\ \iff\ & 2 \times (x-7)^2 + 62 = 112\\ \iff\ & 2 \times (x-7)^2 = 112 - 62 = 50\\ \iff\ & (x-7)^2 = \frac{50}{2} = 25\\ \iff\ & x - 7 = \sqrt{25} = 5 \text{ ou } x - 7 = -\sqrt{25} = -5\\ \iff\ & x = 5 + 7 = 12 \text{ ou } x = -5 + 7 = 2\end{aligned}$$

L'aire de la partie grisée vaut 112 cm^2 pour $x = 2$ ou pour $x = 12$.

Question complémentaire

1. On choisit parmi toutes les compétences de l'annexe 4 les plus importantes : parmi GRANDEURS ET MESURE, les deux seules compétences mobilisées sont reprises ci-dessous, mais parmi CONNAISSANCE DES FRACTIONS SIMPLES ET DES NOMBRES DÉCIMAUX, seule est reprise la plus importante ...
   (a) Classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire (par superposition, découpage et recollement ou pavage par une surface de référence). Pour la question 2 de l'annexe 3.

(b) Mesurer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (dont l'aire est prise pour unité) ~~ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé~~ (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement). Pour les questions 1 et 3 de l'annexe 3. Pour la question 1, le pavage effectif ne suffit pas car il faut quelque fois compléter par des moitiés voire des quarts de figure U, mais il n'en reste pas moins incontournable.

(c) Utiliser dans des cas simples des fractions ou des sommes d'entiers et des fractions pour coder des mesures ~~de longueur ou~~ d'aires, une unité étant choisie, ~~ou pour construire un segment (ou une surface) de longueur (ou d'aire) donnée~~. Pour la question 1 de l'annexe 3.

2. (a) $\boxed{\text{Phase 1. Mise en route ; Appropriation.}}$ "Le professeur distribue [...] *Nous allons choisir la pièce U comme unité d'aire et déterminer l'aire de chacune des autres pièces*".

Intérêts (point de vue de l'élève) :
– cela permet d'entrer dans la situation proposée (faire connaissance avec les pièces du puzzle)
– cela permet de situer le travail, de comprendre ce qui est attendu, de s'approprier le but à atteindre (à savoir, déterminer l'aire de chacune des pièces en fonction de celle de la pièce U)

(b) $\boxed{\text{Phase 2. Recherches.}}$ "Il distribue [...] par deux".

Intérêts (point de vue de l'élève) :
– cela permet de s'engager dans la tâche, de mobiliser ses compétences, ses savoirs (réfléchir sur la notion d'aire et de mesure d'aire)
– cela permet de se questionner, de questionner l'autre, de faire/défaire/refaire (par le fait de travailler par deux).

(c) $\boxed{\text{Phase 3. Mise en commun, synthèse.}}$ "Une mise en commun autour des travaux de chaque groupe".

Intérêts (point de vue de l'élève) :
– cela permet de présenter son travail (expliquer sa démarche),
– cela permet de d'observer le travail des autres (comprendre une démarche),
– cela permet de confronter son travail à celui des autres, de discuter, d'argumenter, d'analyser (justifier sa démarche ou percevoir ses erreurs ou ...).

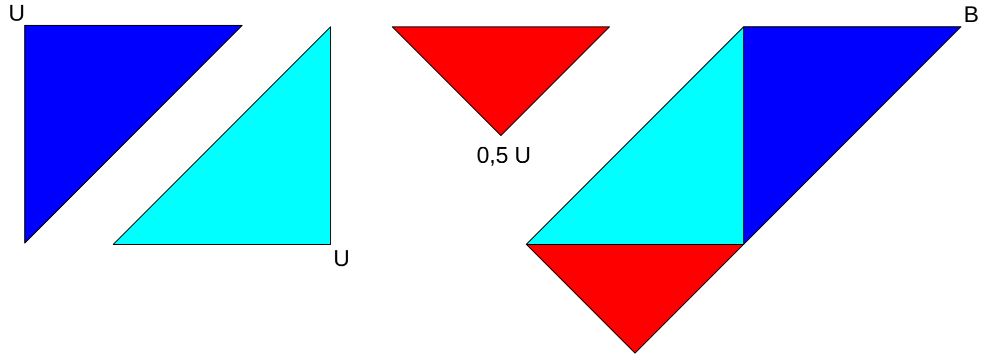
(d) $\boxed{\text{Phase 4. Validation, structuration, institutionnalisation.}}$ "une validation".

Intérêts (point de vue de l'élève) :
– cela permet de savoir si une démarche est correcte ou non (validation),
– cela permet de mettre des mots sur ce que l'on a appris, de verbaliser, de garder la trace d'une règle ou d'une découverte provisoire mais validée pour fixer un état des savoirs (dans le cadre d'une institutionnalisation).

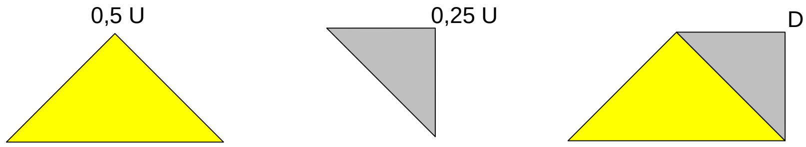
3. Les manipulations proposées ci-dessous mettent tacitement en oeuvre la propriété suivante (dite de σ-additivité) : "l'aire d'une réunion disjointe de deux surfaces est somme des aires de ces deux surfaces".

Soit u l'aire de la figure U.

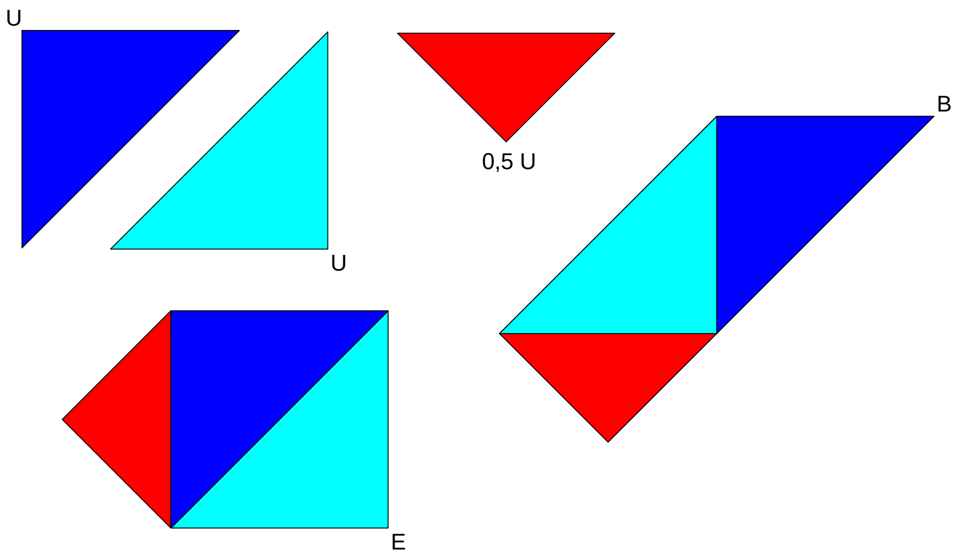
- La pièce A et la pièce U sont superposables. Donc, l'aire de A est $1\ u$.
- On peut paver la pièce B avec deux exemplaires de la pièce U plus un exemplaire de la pièce U plié en 2. Donc, l'aire de B est $2,5\ u$ (ou $\frac{5}{2}\ u$).



- On peut paver la pièce D avec un exemplaire de la pièce U plié en 2 plus un exemplaire de la pièce U plié en 4. Donc, l'aire de D est $0,75\ u$ (ou $\frac{3}{4}\ u$).



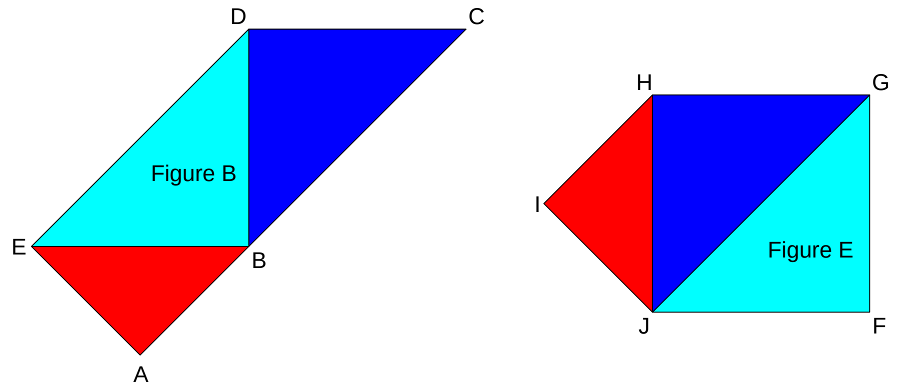
4. L'enseignant peut faire constater que les pièces B et E sont décomposables en des pièces superposables, donc de même aire ...



5. Les polygones B et E sont à comparer au niveau de leur périmètre. Le périmètre d'un polygone est par définition la somme des longueurs des côtés qui bordent le polygone en question.

   On nomme les points comme sur la figure ci-après pour clarifier les explications.

   La manipulation consiste à subdiviser le segment $[AC]$ comme réunion disjointe des segments $[AB]$ et $[BC]$.



Ensuite, de

- $EA = HI$,
- $AB = IJ$,
- $BC > JF$,
- $CD = FG$,
- et $DA > GH$,

on déduit que le périmètre de la figure B est supérieur à celui de la figure E (les périmètres sont, par conséquent, distincts).