EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x)=1+\ln(1+x)$.
On note c_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On note D la droite d'équation $y=x$.

Partie A

1) a) Étudier le sens de variation de la fonction f.

   b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

   c) Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

   d) Montrer que sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2;3]$.

   e) À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe c_f et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \le u_n \le \beta$.

2) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.