Exercice 4 (4 *points*)

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. *a.* Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.
   c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.