EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1) **a)** Calculer u_1.

b) Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à :

$$45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.$$

A partir de ces données, conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2) On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = 4n^2 + 12n + 5.$$

4) Valider la conjecture émise à la question **1)b)**.