

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la fonction f définie sur $] - 1; 6[$ par $f(x) = \frac{9}{6 - x}$.

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée en annexe accompagnée de la droite d'équation $y = x$.

Construire sur ce graphique les points $M_0(U_0; 0)$, $M_1(U_1; 0)$, $M_2(U_2; 0)$, $M_3(U_3; 0)$ et $M_4(U_4; 0)$.

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2.

2.a. Démontrer que si $x < 3$, on a alors $\frac{9}{6 - x} < 3$. En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n .

2.b. Etudier le sens de variation de la suite (U_n) .

2.c. Que peut-on déduire des questions 2.a. et 2.b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n .

3.a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

3.b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .

3.c. Calculer la limite de la suite (U_n) .

ANNEXE

A rendre avec la copie

EXERCICE 1

