EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.
Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E) admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A - Existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. Vérifier que $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B - Encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}.$$

1. Etude de quelques propriétés de la fonction g

a. Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.