EXERCICE 4 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = \ln(u_n).$$

a. On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = \ln(u_n).$$

a. On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.