

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$ et $b_0 = 7$ et
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases} .$$

Soit D une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) . Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

- 1) Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 .
- 2) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout n dans \mathbb{N} . Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ dont on précisera le premier terme.
Exprimer u_n en fonction de n .
- 3) Comparer a_n et b_n . Etudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) .
Interpréter géométriquement ces résultats.
- 4) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
- 5) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite constante.
En déduire que les segments $[A_n B_n]$ ont tous même milieu I .
- 6) Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.