**EXERCICE 4 (5 points )**

***Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies, pour tout entier naturel $n$, par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ ; } v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

**1)** Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.

**2)** Soit la suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $w_n = v_n - u_n$.

**a)** Montrer que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

**b)** Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ et préciser la limite de la suite $(w_n)$.

**3)** Après avoir étudié le sens de variation des suites $(u_n)$ et $(v_n)$, démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

**4)** On considère à présent la suite $(t_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par : $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

**a)** Démontrer que la suite $(t_n)$ est constante.

**b)** En déduire la limite des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.