Exercice 1 (3 points)

1. Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

   a) Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

   b) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur **N** par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

   b) Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.